Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 165–170

Kavagučio erdvių beveik sandaugos struktūros

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
el. paštas: edmundas@vpu.lt

Sakykime, kad T^2V^n – n-matės glodžios daugdaros V^n antros eilės liestinė sluoksniuotė. Jos lokaliosios koordinatės (x^i, y^i, z^i) keičiasi pagal dėsnį (žr. [4])

$$\begin{aligned} &\bar{x}^i = f^i(x^\kappa), \quad \bar{y}^i = f^i_k y^k, \\ &\bar{z}^i = f^i_k z^k + \frac{1}{2} f^i_{kh} y^k y^h, \quad i, j, k, \ldots, = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

čia $f^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$, $g^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$ ir $f^i_k g^k_j = \delta^i_j$.

Apibendrinta Kavagučio erdve vadinama daugdara V^n, kurios antrosios eilės liestinėje sluoksniuotėje T^2V^n yra apibrėžta diferencijuojama skaliarinė funkcija F: $T^2V^n \to R$, tenkinanti sąlygą $\det \|\frac{\partial^2 F}{\partial z^i \partial z^j}\| \neq 0$. Pažymėję $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$, $\partial''_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$, apibrėžkime Kavagučio erdvės metrinį tenzorių $g_{ij} = \partial''_i \partial''_j F$. Kadangi $\det \|g_{ij}\| \neq 0$, tai egzistuoja jam atvirkštinis tenzorius g^{ij} ir yra teisinga lygybė $g_{ik} g^{kj} = \partial^i_j$. Kaip įrodyta [4] darbe, dydžiai

$$\begin{aligned} &\Gamma^i_j = g^{ik} \partial''_k \partial'_j F, \\ &M^i_j = g^{ik} \left(\partial''_k \partial_j F - \partial''_p F \partial'_k \Gamma^p_j + \partial''_p F \Gamma^h_k \partial''_h \Gamma^p_j \right), \quad \widetilde{M}^i_j = M^i_j - \Gamma^i_k \Gamma^k_j \end{aligned} \tag{2}$$

sudaro Kavagučio erdvės tiesinės sieties objektą (Γ^i_j, M^i_j) ir leidžia apibrėžti invariantinius bazinio diferencijavimo operatorius $\partial^\Gamma_i = \partial_i - \Gamma^k_i \partial'_k - \widetilde{M}^k_i \partial''_k$, $\partial'^\Gamma_i = \partial'_i - \Gamma^k_i \partial''_k$, o taip pat diferencialus $\mathrm{D}y^i = \mathrm{d}y^i + \Gamma^i_k \,\mathrm{d}x^k$, $\mathrm{D}z^i = \mathrm{d}z^i + \Gamma^i_k \,\mathrm{d}y^k + M^i_k \,\mathrm{d}x^k$. Komutuojant minėtus diferencijavimo operatorius, gaunami tiesinės sieties kreivumo tenzoriai

$$\begin{aligned} &R^i_{pq} = 2\partial^\Gamma_{[p}\Gamma^i_{q]}, \quad H^i_{pq} = 2\left(\partial^\Gamma_{[p} \widetilde{M}^i_{q]} + \Gamma^i_k R^k_{pq} \right), \\ &N^i_{pq} = \partial^\Gamma_q \Gamma^i_p - \partial'^\Gamma_p \widetilde{M}^i_q - \Gamma^i_h \partial' \Gamma_p \Gamma^h_q, \quad K^i_{pq} = \partial''_p \Gamma^i_q. \end{aligned} \tag{3}$$

Diferencialiniai-geometriniai objektai

$$\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} = \partial' \Gamma_j \Gamma^i_k, \quad \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = \partial''_j M^i_k - \Gamma^h_k \partial''_j \Gamma^i_h \tag{4}$$

apibrėžia Kavagučio erdvės afiniąsias sietis (Bervaldo siečių Finslerio erdvėse analogus [2]). Kavagučio erdvėje egzistuoja vienintelė afinioji sietis $(\Pi^i_{jk}, C^i_{jk}, D^i_{jk})$, kurios atžvilgiu metrinio tenzoriaus g_{ij} komponentės yra kovariantiškai pastovios; šios sieties komponenčių išraiškos yra tokios:

$$
\begin{aligned}
\Pi^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ih} \left(\partial^\Gamma_k g_{jh} + \partial^\Gamma_j g_{kh} - \partial^\Gamma_h g_{kj}\right), \\
C^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ih} \left(\partial'^\Gamma_k g_{jh} + \partial'^\Gamma_j g_{kh} - \partial'^\Gamma_h g_{kj}\right), \quad D^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} \partial''_h g_{jk}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Pažymėję $x^{x+i}, x^{2n+i} = z^i$, antrosios eilės liestinės sluoksniuotės koordinačių keitimosi dėsnius (1) užrašome lygybe

$$
\tilde{x}^A = f^A(x^B), \quad A, B, \ldots = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n, 2n+1, \ldots, 3n, \tag{6}
$$

ir nagrinėjame diferencialus $\mathrm{d}x^A = \{\mathrm{d}x^i, \mathrm{d}y^i, \mathrm{d}z^i\}$, $\mathrm{D}x^A = \{\mathrm{d}x^i, \mathrm{D}y^i, \mathrm{D}z^i\}$ bei dalines išvestines $\partial_A = \{\partial_i, \partial'_i, \partial''_i\}$, $\partial^\Gamma_A = \{\partial^\Gamma_i, \partial'^\Gamma_i, \partial''_i\}$. Tuomet tenzoriui T_{AB} galime užrašyti tokį išdėstymą

$$
T = T_{AB}\, \mathrm{d}x^A \otimes \mathrm{d}x^B = t_{AB} \mathrm{D}x^A \otimes \mathrm{D}x^B, \tag{7}
$$

o tenzoriui T^{AB} –

$$
T = T^{AB} \partial_A \otimes \partial_B = t^{AB} \partial^\Gamma_A \otimes \partial^\Gamma_B. \tag{8}
$$

Pastebėkime, kad visos objektų t_{AB} ir t^{AB} komponentės yra tenzoriai. Atskiru atveju, kai

$$
t_{AB} = \begin{Vmatrix} g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & g_{ij} \end{Vmatrix}, \quad t^{AB} = \begin{Vmatrix} g^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & g^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & g^{ij} \end{Vmatrix}, \tag{9}
$$

tai iš (7) ir (8) lygybių gauname Kavagučio erdvės Sasaki metriką H_{AB}:

$$
\begin{aligned}
&H_{ij} = g_{ij} + g_{pq}\Gamma^p_i\Gamma^q_j + g_{pq}M^p_iM^q_j, \quad H_{n+ij} = g_{ik}\Gamma^k_j + g_{pq}\Gamma^p_iM^q_j, \\
&H_{in+j} = g_{kj}\Gamma^k_i + g_{pq}M^p_i\Gamma^q_j, \quad H_{n+in+j} = g_{ij} + g_{pq}\Gamma^p_i\Gamma^q_j, \\
&H_{2n+ij} = g_{ik}M^k_j, \quad H_{i2n+j} = g_{kj}M^k_i, \quad H_{2n+in+j} = g_{ik}\Gamma^k_j, \\
&H_{n+i2n+j} = g_{kj}\Gamma^k_i, \quad H_{2n+i2n+j} = g_{ij}, \\
&H^{ij} = g^{ij}, \quad H^{n+ij} = -g^{kj}\Gamma^i_k, \quad H^{in+j} = -g^{ik}\Gamma^j_k, \\
&H^{n+in+j} = g^{ij} + g^{pq}\Gamma^i_p\Gamma^j_p, \quad H^{i2n+j} = -g^{kj}\widetilde{M}^i_k, \quad H^{2n+ij} = -g^{ik}\widetilde{M}^j_k, \\
&H^{2n+in+j} = -g^{kj}\Gamma^i_k + g^{pq}\Gamma^j_q\widetilde{M}^i_p, \quad H^{n+i2n+j} = -g^{ik}\Gamma^j_k + g^{pq}\Gamma^i_p\widetilde{M}^j_q, \\
&H^{2n+i2n+j} = g^{ij} + g^{pq}\Gamma^i_p\Gamma^j_q + g^{pq}\widetilde{M}^i_p\widetilde{M}^j_q.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Pasirinkę bet kokius skaičius $a, b, c, d, e, f, k, l, m, p, q, r, s, t, u, v, w, z$, sukonstruokime tenzorių

$$t_{AB} = \begin{Vmatrix} ag_{ij} & bg_{ij} & cg_{ij} \\ dg_{ij} & eg_{ij} & fg_{ij} \\ kg_{ij} & lg_{ij} & mg_{ij} \end{Vmatrix}, \quad t^{AB} = \begin{Vmatrix} pg^{ij} & qg^{ij} & rg^{ij} \\ sg^{ij} & tg^{ij} & vg^{ij} \\ ug^{ij} & wg^{ij} & zg^{ij} \end{Vmatrix} \tag{11}$$

(Γ, M) – liftus (žr. [4]) G_{AB} ir G^{AB}. Šie tenzoriai apibrėžia Kavagučio erdvėje metriką tada ir tik tada, kai teisingos lygybės

$$G_{AB} = G_{BA}, \quad G^{AB} = G^{BA}, \quad G_{AC}G^{CB} = \delta_A^B \tag{12}$$

ir jų išvados

$$\begin{aligned} &cp + fs + mv = 0, \quad bs + et + fu = 1, \\ &cs + ft + mu = 0, \quad bv + eu + fz = 0, \\ &bp + es + fv = 0, \quad cv + fu + mz = 1, \\ &ap + bs + cv = 1, \quad as + bt + cu = 0, \\ &av + bu + cz = 0, \\ &d = b, \quad k = c, \quad l = f, \quad v = r, \quad w = u, \quad s = q. \end{aligned} \tag{13}$$

Jei

$$\Delta = c^2e + f^2a + b^2m - aem - 2cbf \neq 0, \tag{14}$$

tai iš (13) sistemos gauname, kad

$$\begin{aligned} &p = \frac{f^2 - em}{\Delta}, \quad q = s = \frac{bm - cf}{\Delta}, \quad r = v = \frac{ce - bf}{\Delta}, \\ &u = w = \frac{af - bc}{\Delta}, \quad z = \frac{b^2 - ae}{\Delta}, \quad t = \frac{c^2 - am}{\Delta}, \end{aligned} \tag{15}$$

čia a, b, c, f, e, m – bet kokie skaičiai, kuriems teisinga (14) nelygybė. Taigi įrodėme teoremą:

1 teorema. *Kavagučio erdvėje egzistuoja metrikų šeima, priklausanti nuo šešių parametrų. Metrinių tenzorių G_{AB} ir G^{AB} komponentėms yra teisingos išraiškos*:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= ag_{ij} + ag_{ik}\Gamma_j^k + cg_{ik}M_j^k + bg_{kj}\Gamma_i^k + cg_{kj}M_i^k + eg_{pq}\Gamma_i^p\Gamma_j^q \\ &\quad + fg_{pq}\Gamma_i^p M_j^q + fg_{pq}M_i^p\Gamma_j^q + mg_{pq}M_i^p M_j^q, \\ G_{n+ij} &= bg_{ij} + eg_{ik}\Gamma_j^k + fg_{ik}M_j^k + cg_{kj}\Gamma_i^k + fg_{pq}\Gamma_i^p\Gamma_j^q + mg_{pq}\Gamma_i^p M_j^q, \\ G_{in+j} &= ag_{ij} + cg_{ik}\Gamma_j^k + eg_{kj}\Gamma_i^k + fg_{kj}M_i^k + fg_{pq}\Gamma_i^p\Gamma_j^q + mg_{pq}M_i^p\Gamma_j^q, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&G_{n+in+j} = eg_{ij} + fg_{ik}\Gamma^k_j + fg_{kj}\Gamma^k_i + mg_{pq}\Gamma^p_i\Gamma^q_j,\\
&G_{n+ij} = cg_{ij} + fg_{ik}\Gamma^k_j + mg_{ik}M^k_j, \quad G_{in+j} = cg_{ij} + fg_{jk}\Gamma^k_i + mg_{kj}M^k_i,\\
&G_{n+i2n+j} = fg_{ij} + mg_{kj}\Gamma^k_i, \quad G_{2n+in+j} = fg_{ij} + mg_{ik}\Gamma^k_j,\\
&G_{2n+i2n+j} = mg_{ij},
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&G^{ij} = pg^{ij}, \quad G^{n+ij} = qg^{ij} - pg^{kj}\Gamma^i_k, \quad G^{in+j} = qg^{ij} - pg^{ik}\Gamma^j_k,\\
&G^{n+in+j} = tg^{ij} - sg^{kj}\Gamma^i_k - qg^{ik}\Gamma^j_k + pg^{kh}\Gamma^i_k\Gamma^j_h, \qquad (17)\\
&G^{2n+ij} = rg^{ij} - qg^{kj}\Gamma^i_k - pg^{kj}\widetilde{M}^i_k, \quad G^{i2n+j} = rg^{ij} - qg^{ik}\Gamma^j_k - pg^{ik}\widetilde{M}^j_k,\\
&G^{n+i2n+j} = ug^{ij} - tg^{ik}\Gamma^j_k - rg^{kj}\Gamma^i_k - qg^{ik}\widetilde{M}^j_k + qg^{pq}\Gamma^i_p\Gamma^j_q + pg^{pq}\Gamma^i_p\widetilde{M}^j_q,\\
&G^{2n+in+j} = ug^{ij} - tg^{kj}\Gamma^i_k - rg^{ik}\Gamma^j_k - qg^{kj}\widetilde{M}^i_k + qg^{pq}\Gamma^i_p\Gamma^j_q + pg^{pq}\widetilde{M}^i_p\Gamma^j_q,\\
&G^{2n+i2n+j} = zg^{ij} - ug^{kj}\Gamma^i_k - ug^{ik}\Gamma^j_k - rg^{ik}\widetilde{M}^j_k - rg^{kj}\widetilde{M}^i_k + tg^{pq}\Gamma^i_p\Gamma^j_q\\
&\qquad + qg^{pq}\widetilde{M}^i_p\Gamma^j_q + qg^{pq}\Gamma^i_p\widetilde{M}^j_q + pg^{pq}\widetilde{M}^i_p\widetilde{M}^j_q,
\end{aligned}
$$

be to, parametrai p, q, r, u, t, z turi reikšmes, surastas iš (15) *lygybių.*

Kavagučio erdvėje egzistuoja apibendrinta λ-struktūra, suderinta su metrikomis G_{AB}, jei joje apibrėžti du tenzoriniai laukai P ir Q, tenkinantys sąlygas (žr. [1]):

$$
P^A_B Q^B_C = \lambda\delta^A_C, \quad G_{AB} = \lambda P^C_A Q^D_B G_{CD}. \tag{18}
$$

Apibrėžkime tenzorius P ir Q tokiomis lygybėmis:

$$
P^A_B = H^{AC}G_{CB}, \quad Q^A_B = G^{AC}H_{CB}. \tag{19}
$$

Tuomet lengvai patikriname, kad šie tenzoriai tenkina (17) tapatybes su $\lambda = 1$. Jie apibrėžia Kavagučio erdvių apibendrintas beveik sandaugos struktūras.

Iš (16) ir (18) lygybių išplaukia, kad tenzoriai P ir Q sutampa, jei yra teisingos tokios lygybės

$$
\begin{aligned}
&ac + fb + mc = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,\\
&cb + fe + mf = 0, \quad c^2 + f^2 + m^2 = 1,\\
&ab + eb + fc = 0, \quad b^2 + e^2 + f^2 = 1.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Išsprendę šią sistemą, gauname

$$
\begin{aligned}
&a = \tfrac{1}{2}(\pm 1 - e - 2m), \qquad b = \pm\sqrt{\tfrac{(e+m)(\pm 1 - e)}{2}},\\
&c = \pm\sqrt{(e+m)(e - 2m \pm 1)}, \qquad f = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(\pm 1 - e)(e - 2m \pm 1)},
\end{aligned} \tag{21}
$$

čia e ir m bet kokie skaičiai, kuriems teisingos nelygybės

$$(e+m)(\pm 1 - e) \geqslant 0, \quad (e+m)(e-2m\pm 1) \geqslant 0. \tag{22}$$

Taigi įrodėme teoremą:

2 teorema. *Kavagučio erdvėje egzistuoja dviparametrinių beveik sandaugos struktūrų šeima, kurių struktūrinis tenzorius P turi tokias komponentes*

$$\begin{aligned}
&P_j^i = a\delta_j^i + b\Gamma_j^i + cM_j^i, \quad P_j^{n+i} = b\delta_j^i + (e-a)\Gamma_j^i + fM_j^i - b\Gamma_k^i\Gamma_j^k - c\Gamma_k^i M_j^k,\\
&P_j^{2n+i} = c\delta_j^i + (f-b)\Gamma_j^i - (a-m)\widetilde{M}_j^i + (m-e)\Gamma_k^i\Gamma_j^k\\
&\qquad -b\widetilde{M}_k^i\Gamma_j^k - f\Gamma_k^i M_j^k - c\widetilde{M}_k^i M_j^k,\\
&P_{n+j}^i = b\delta_j^i + c\Gamma_j^i, \quad P_{n+j}^{n+i} = e\delta_j^i + (f-b)\Gamma_j^i - c\Gamma_k^i\Gamma_j^k,\\
&P_{n+j}^{2n+i} = f\delta_j^i + (m-e)\Gamma_j^i - b\widetilde{M}_j^i - f\Gamma_k^i\Gamma_j^k - c\widetilde{M}_k^i\Gamma_j^k, \quad P_{2n+j}^i = c\delta_j^i,\\
&P_{2n+j}^{n+i} = f\delta_j^i - c\Gamma_j^i, \quad P_{2n+j}^{2n+i} = m\delta_j^i - f\Gamma_j^i - c\widetilde{M}_j^i,
\end{aligned} \tag{23}$$

čia e ir m – bet kokie skaičiai, tenkinantys (21) nelygybes, o a, b, c, f surandami iš (20) *lygybių.*

3 teorema. *Kavagučio erdvės beveik sandaugos struktūra yra integruojama, jei šios erdvės tiesinė sietis plokščia, o afiniosios sietys $\overset{1}{\Gamma}$ ir $\overset{2}{\Gamma}$ sutampa.*

Teoremos įrodymui pakanka apskaičiuoti beveik sandaugos struktūrų (22) Nijenhuis'o tenzorių

$$N_{BC}^A = P_C^D\left(\partial_B P_D^A - \partial_D P_B^A\right) - P_B^D\left(\partial_C P_D^A - \partial_D P_C^A\right). \tag{24}$$

Tenzorinė struktūra yra integruojama tada, kai šis tenzorius lygus nuliui [3]. Atlikę veiksmus gauname, jog $N_{BC}^A = 0$ tada ir tik tada, kai teisingos lygybės $R_{pq}^i = K_{pq}^i = H_{pq}^i = N_{pq}^i = 0$, $\overset{1}{\Gamma}{}^i_{pq} - \overset{2}{\Gamma}{}^i_{pq} = 0$.

Kavagučio erdvės afinioji sietis Λ_{AB}^C yra vadinama asocijuota su šios erdvės tenzorine struktūra, jei struktūrinių tenzorių kovariantinės išvestinės sieties Λ_{AB}^C atžvilgiu lygios nuliui.

4 teorema. *Afinioji sietis yra asocijuota su Kavagučio erdvės beveik sandaugos struktūromis* (22) *tada ir tik tada, kai jos komponentėms yra teisingos tapatybės*:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{2n+jc}^i = \Lambda_{2n+jc}^{n+i} = 0,\\
&\Lambda_{jc}^i = \Lambda_{n+jc}^{n+i} = \Lambda_{2n+jc}^{2n+i},\\
&\Lambda_{n+jc}^{2n+i} = \partial_c\Gamma_j^i - \Gamma_k^i\Lambda_{jc}^k + \Gamma_j^k\Lambda_{kc}^i,\\
&\Lambda_{jc}^{2n+i} = \partial_c\widetilde{M}_j^i - \widetilde{M}_k^i\Lambda_{jc}^k + \widetilde{M}_j^k\Lambda_{kc}^i + \Gamma_j^k\Lambda_{n+kc}^{2n+i}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Iš šių lygybių išplaukia, kad afinioji sietis Λ^C_{AB}, kurios nenulinės komponentės išreiškiamos lygybėmis

$$\begin{aligned}
&\Lambda^i_{jh} = \Lambda^{n+i}_{n+jh} = \Lambda^{2n+i}_{2n+jh} = \Pi^i_{jh}, \quad \Lambda^{n+i}_{j2n+h} = \Lambda^{2n+i}_{n+j2n+h} = \partial''_h \Gamma^i_j, \\
&\Lambda^{n+i}_{jn+h} = \Lambda^{2n+i}_{n+jn+h} = \partial'_h \Gamma^i_j, \quad \Lambda^{n+\imath}_{jh} = \Lambda^{2n+i}_{n+jh} = \partial_h \Gamma^i_j - \Gamma^i_k \Pi^k_{jh} + \Gamma^k_j \Pi^i_{kh}, \qquad (26) \\
&\Lambda^{2n+i}_{j2n+h} = \partial''_h \widetilde{M}^i_j, \quad \Lambda^{2n+i}_{jn+h} = \partial'_h \widetilde{M}^i_j + \Gamma^k_j \partial'_h \Gamma^i_k, \\
&\Lambda^{2n+i}_{jh} = \partial_h \widetilde{M}^i_j + \Gamma^k_j \partial'_k \widetilde{M}^i_h + \Gamma^k_j \Gamma^p_k \partial'_h \Gamma^i_p - \widetilde{M}^i_k \Pi^k_{jh} + \widetilde{M}^k_j \Pi^i_{kh},
\end{aligned}$$

yra asocijuotos su Kavagučio erdvės beveik sandaugos struktūromis afiniosios sieties pavyzdys.

Literatūra

[1] F.G. Klepp, Conections compatible with special Finsler Structures associated to a pair of Finsler Metrics, *Mathematica*, **28**(51), 47–58 (1986).

[2] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer (1959).

[3] K. Yano, M.Kon, *Structures on Manifolds*, Singapoore World. Sci., Publ. Co (1984).

[4] E. Мазетис, Геометрия пространств Кавагути, *Liet. Matem. Rink.*, **40**(3), 321–334 (2000).

Produkt Strukture in Kawaguchische Räumen

E. Mazėtis

In dieser Arbeit stellt man eine nene Methode der Konstruierung eine Produkt Strukture in Kawaguchische Räumen dar. Diese Strukture sind mit Sasakischen Metrik assoziiert, und ihre strukturische Tensoren sind auf Metrische Funktion definiert. In dieser Arbeit sind Bedingungen Integrierbarkeit Produkt Strukturen und assoziierte affinne Zusammenhänge konstruiert.