Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 179–181

Judesiai erdvėje Y_n

Algimantas Pranas URBONAS (VPU)
el. paštas: urbonas@vpu.lt

1. Įvadas

Atraminių elementų erdvė Y_n apibrėžta darbe [1], kuriame taip pat išplėtota šios erdvės kreivumo teorija.

Priminsime pagrindines sąvokas.

Tegul V_n yra n-matė diferencijuojama daugdara ir kiekviename jos taške $x(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ prijungsime objektą y_k. Šį objektą laikysime atraminiu objektu. Porą (x^i, y_k) vadinsime atraminiu elementu, o šių elementų erdvę žymėsime simboliu Y_n.

Šioje atraminių elementų daugdaroje nagrinėsime tokias koordinačių transformacijas:

$$\begin{cases} \bar{x}^i = f^i(x^k), \left(x^k = g^k(\bar{x}^i)\right) \\ \bar{y}_k = g^l_k y_l + f^s_l g^l_{sk}, \end{cases} \tag{1}$$

kur

$$f^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad f^i_{jk} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k}, \ldots$$
$$g^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}, \quad g^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}, \ldots \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Darbe [1] įrodyta, kad objektas $\Gamma_{ij}(x, l)$ $(\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji})$ apibrėžia erdvėje Y_n tiesinę sietį, jei jo komponentės (1) transformacijos atveju kinta pagal dėsnį

$$\bar{\Gamma}_{ij} = g^k_i g^p_j \Gamma_{kl} - g^p_{ij} y_p - g^r_{ip} g^t_j f^p_{rt} - f^l_s g^s_{ijl}. \tag{2}$$

Šis objektas leidžia erdvėje Y_n įvesti invariantinį tenzorinių laukų diferencijavimą. Pavyzdžiui, tenzorių lauko $T^i_{jk}(x, y)$ kovariantinė išvestinė apibrėžiama taip:

$$\nabla_l T^i_{jk} = \partial_l T^i_{jk} - \partial^s T^i_{jk} \Gamma_{sl} - T^s_{jk} \partial^i \Gamma_{sl} + T^i_{pk} \partial^p \Gamma_{jl} + T^i_{jp} \partial^p \Gamma_{kl}, \tag{3}$$

kur $\partial_l = \frac{\partial}{\partial x^l}$, $\partial^s = \frac{\partial}{\partial y_s}$.

Erdvės Y_n kreivumo tenzorius yra:

$$R_{ijk} = 2\left[\partial_{[j} \Gamma_{|i|k]} + \partial^p \Gamma_{i[j} \Gamma_{|p|k]}\right]. \tag{4}$$

Šiame darbe mes taip pat naudosimės tapatybėmis, gautomis [1].

2. Judesiai erdvėje Y_n

APIBRĖŽIMAS. Infinitezimalią bazės V_n transformaciją $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\delta t$ vadinsime judesiu erdvėje Y_n, jei ši transformacija nekeičia (lokaline prasme) tiesinės sieties objekto Γ_{ij}.

Teorema. *Tam, kad vektorius $v^i(x)$ apibrėžtų judesį erdvėje Y_n, būtina ir pakankama, kad jo komponentės tenkintų diferencialinių lygčių sistemą*:

$$v^s\partial_s\Gamma_{ij} + \partial_i v^s\Gamma_{sj} + \partial_j v^s\Gamma_{is} - \partial_{ij}v^s y_s - \partial_{ijs}v^s$$
$$-\partial_k v^s\partial^k\Gamma_{ij}y_s - \partial^k\Gamma_{ij}\partial_{ks}v^s = 0. \tag{5}$$

Teoremos įrodymui imame transformaciją $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\delta t$. Tada atitinkamai $\bar{y}_k$ ir $\bar{\Gamma}_{jk}(\bar{x}, \bar{y})$ išreiškiami (1) ir (2) formulėmis. (5) lygtis gausime reikalaudami, kad funkcijų $\bar{\Gamma}_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$ skleidiniuose pagal δt koeficientai prie pirmojo δt laipsnio būtų lygūs nuliui. Praleisdami tarpinius skaičiavimus, teoremos įrodymą baigiame.

Toliau, pasinaudodami kovariantinio diferenvijavimo aparatu, ieškosime (5) lygčių integruojamumo sąlygų.

Pastebėsime, kad funkcijų $v^i(x)$ dalines išvestines galima išreikšti kovariantinėmis išvestinėmis. Pvz.,

$$\partial_j v^i = \nabla_j v^i + \partial^i\Gamma_{pj}v^p,$$
$$\partial_{jk}v^i = \nabla_j\nabla_k v^i - \partial_j\partial^i\Gamma_{sk}v^s + \partial^i\Gamma_{sk}\nabla_j v^s + \partial^i\Gamma_{sk}\partial^s\Gamma_{pj}v^p$$
$$+\partial^i\partial^p\Gamma_{sk}\Gamma_{pj}v^s + \partial^i\Gamma_{sj}\nabla_k v^s - \partial^s\Gamma_{jk}\nabla_s v^i.$$

Toliau, pasinaudodami kovariantinio diferencijavimo aparatu ieškosime (5) lygčių integruojamumo sąlygų.

(5) lygtis galima užrašyti

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij} = 0, \tag{6}$$

kur $\underset{v}{\mathcal{L}}$ – Lie išvestinė $v^i(x)$ atžvilgiu.

Iš Lie išvestinių savybių ir Γ_{ij} transformacijų dėsnio išplaukia, kad $\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij}$ yra tenzorius. Diferencijuodami šį tenzorių kovariantiškai pagal x^k gausime:

$$\nabla_k(\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij}) = \partial_k(\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij}) - \partial^s(\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij})\cdot\Gamma_s k + (\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{sj})\cdot\partial^s\Gamma_{ik} + (\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{is})\partial^s\Gamma_{jk}.$$

Atlikę dešinės reiškinio pusės skaičiavimus ir alternuodami šią lygybę pagal j ir k, gausime tapatybę:

$$\nabla_{[k}(\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{|i|j]}) = \underset{v}{\mathcal{L}}R_{ijk}. \tag{7}$$

Analogiškai, kovariantiškai diferencijuodami $\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij}$ pagal y_k ir pasinaudodami Ričči tapatybėmis [1] bei Lie išvestinės savybėmis išvesime pareinamybes:

$$\partial^k(\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij}) = \underset{v}{\mathcal{L}}(\partial^k\Gamma_{ij}). \tag{8}$$

Tuo būdu, vektoriniams laukams $v^i(x)$ tenkinantiems (6) lygtis, iš (7) ir (8) išplaukia:

$$\underset{v}{\mathcal{L}} R_{ijk} = 0, \tag{9}$$

$$\underset{v}{\mathcal{L}}(\partial^k\Gamma_{ij}) = 0. \tag{10}$$

Teorema. *Pirmoji (6) lygčių integruojamumo sąlygų serija yra* (9) ir (10).

Kitos serijos gaunamos pastarąsias lygtis diferencijuojant kovariantiškai po Lie išvestinės ženklu.

Literatūra

[1] J. Pakalnytė, A.P. Urbonas, Kreivumo teorija atraminių elementų erdvėje Y_n, *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, **III**, 193–201 (1999).

Les mouvements dans l'espace Y_n

A.P. Urbonas

Dans cet article on trouve les équations des mouvements dans l'espace Y_n conservants la connexion linéaire de cet espace. En même temps on a obtenu les premières séries des équations d'intégration.