Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 365–369

О значениях тригонометрических функций числового аргумента

Юозас МАЧИС (MII)
e-mail: jmacys@ktl.mii.lt

В статье [1] рассмотрены элементарные подходы к доказательству того, что $\cos 1^\circ$ иррационален (а также иррациональны все значения тригонометрических функций аргумента, выражаемого рациональным количеством градусов – разумеется, за исключением хорошо знакомых значений 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 для синуса или косинуса и значений $0, \pm 1$ для тангенса или котангенса). Цель этой статьи – показать, как элементарно можно убедиться, что $\sin 1$ и $\cos 1$, а также $\sin\frac{1}{n}$ и $\cos\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (обращаем внимание – теперь аргумент числовой, т.е. измеряется в радианах!) иррациональны.

Сначала докажем так называемые неравенства Тейлора для функций $\sin x$ и $\cos x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \tag{1}$$

и

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} + \frac{x^{4m}}{(4m)!} \tag{2}$$

(ср. [2]). Начнем с доказательства неравенства $\sin x < x$. Поскольку у функции $x - \sin x$ производная $(x - \sin x)' = 1 - \cos x$ положительна, то функция возрастает, $x - \sin x > 0 - \sin 0$, т.е. $\sin x < x$. Подобным образом $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$, поскольку производная $(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!})' = -\sin x + x$ положительна (это уже доказано!), поэтому $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} > \cos 0 - 1 + \frac{0^2}{2!}$, т.е. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$. Опять $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$, ибо $(\sin x - x + \frac{x^3}{3!})' = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} > 0$. Теперь ясно, что $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, поскольку производная $(-\cos x + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})' = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ положительна. Продолжая получаем неравенства (1) и (2).

Для читателя может представлять интерес, как выглядело бы строгое доказательство методом математической индукции.

Не трудно убедиться, что неравенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$(-1)^{n+1}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sin x\right) > 0, \tag{3}$$

(в самом деле, при $n = 2m$ получаем левое неравенство, а при $n = 2m+1$ – правое).

Аналогично неравенство (2) записывается как

$$(-1)^n\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \cos x\right) > 0 \tag{4}$$

(при $n = 2m$ получаем правую часть, а при $n = 2m - 1$ – левую часть неравенства).

Для $n = 1$ неравенства (3) и (4) превращаются соответственно в неравенства $\sin x < x$ и $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$, которые уже доказаны. Предположим, что они справедливы при $n = k$:

$$(-1)^{k+1}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} - \sin x\right) > 0, \tag{5}$$

$$(-1)^k\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \cos x\right) > 0. \tag{6}$$

Докажем, что они справедливы при $n = k + 1$, т.е. что

$$(-1)^k\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sin x\right) > 0, \tag{7}$$

$$(-1)^{k+1}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} - \cos x\right) > 0. \tag{8}$$

В самом деле, производная функции, стоящей в левой части неравенства (7), равна $(-1)^k(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \cos x)$, и на основании неравенства (6) положительна. Поэтому левая часть неравенства (7) – возрастающая функция, и ее значение в точке x больше значения в точке 0, равного нулю. Неравенство (7) доказано.

Аналогично производная левой части неравенства (8) равна левой части неравенства (5) (ибо $(-1)^{k+2} = (-1)^k$), следовательно, на основании неравенства (5) положительна. Поэтому функция от x, стоящая в левой части неравенства (8), возрастает и больше нуля – значения в точке 0. Неравенство (8) доказано.

На основании принципа математической индукции неравенства (3) и (4) (а тем самым и неравенства (1) и (2)) доказаны для любого n.

Сейчас мы уже подготовлены к доказательству иррациональности $\sin 1$ и $\cos 1$.

Положим $x = 1$ в формулах (1) и (2):

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4m-1)!} < \sin 1 < 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4m-1)!} + \frac{1}{(4m+1)!}, \tag{9}$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4m-2)!} < \cos 1 < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4m-2)!} + \frac{1}{(4m)!}. \tag{10}$$

Предположим, что $\sin 1$ является рациональным числом, $\sin 1 = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$. Перепишем последнее равенство в виде $\sin 1 = \frac{4p}{4q}$. Неравенство (9) напишем именно с этим q, а вместо $\sin 1$ подставим $\frac{4p}{4q}$:

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4q-1)!} < \frac{4p}{4q} < 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots - \frac{1}{(4q-1)!} + \frac{1}{(4q+1)!}.$$

Умножим последнее неравенство на $(4q+1)!$:

$$(4q+1)! - \frac{(4q+1)!}{3!} + \dots - \frac{(4q+1)!}{(4q-1)!} < 4p(4q-1)!(4q+1) < (4q+1)! - \dots - \frac{(4q+1)!}{(4q-1)!} + 1.$$

Видим, что левая часть неравенства является целым числом, а правая – целым числом, на единицу большим. Получаем, что целое число $4p(4q-1)!(4q+1)$ оказалось между двумя последовательными целыми числами, а такого быть не может. Противоречие означает, что наше предположение о рациональности числа $\sin 1$ было неверным. Следовательно, $\sin 1$ является иррациональным числом.

Иррациональность числа $\cos 1$ доказывается аналогично. Предположим, что $\cos 1$ рационален, т.е. $\cos 1 = \frac{p}{q} = \frac{4p}{4q}$. Тогда в неравенстве (10) полагая $m = q$, имеем:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4q-2)!} < \frac{4p}{4q} < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4q-2)!} + \frac{1}{(4q)!}.$$

Умножаем это неравенство на $(4q)!$:

$$(4q)! - \frac{(4q)!}{2!} + \dots - \frac{(4q)!}{(4q-2)!} < 4p \cdot (4q-1)! < (4q)! - \frac{(4q)!}{2!} + \dots - \frac{(4q)!}{(4q-2)!} + 1.$$

Опять целое число $4p(4q-1)!$ оказалось между двумя последовательными целыми числами, а этого быть не может. Противоречие.

Для автора явилось неожиданностью, что в литературе по элементарной математике доказательство иррациональности $\sin 1$ и $\cos 1$ отсутствует, в то время как доказательство иррациональности числа e можно найти в энциклопедиях элементарной математики и даже в учебниках (см., например, [2]).

Обсудим еще следующий вопрос: что можно утверждать наверняка, зная, что $\sin 1$ и $\cos 1$ иррациональны. Во-первых, не удается отсюда сделать вывод, что $\sin 2$ или $\cos 2$ иррациональны. Действительно, если $\sin\alpha$ иррационален, то вовсе не обязательно, что рационален и $\sin 2\alpha$: например, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ иррационален, но $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ рационален. Аналогично, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ иррационален, но $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ рационален.

С другой стороны, если $\cos\alpha$ рационален, то рационален и $\cos n\alpha$. В самом деле, если $\cos\alpha$ рационален, то рационален и $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Но тогда рационален и $\cos 3\alpha$, поскольку $\cos 3\alpha = (\cos 3\alpha + \cos\alpha) - \cos\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha$. Рационален и $\cos 4\alpha$, ибо $\cos 4\alpha = (\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) - \cos 2\alpha = 2\cos 3\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha$ и т.д. Следовательно, рационален и $\cos n\alpha = \cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha - \cos(n-2)\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$ (математическая индукция!).

Из этого факта сразу следует, что $\cos\frac{1}{n}$ иррационален. В самом деле, если бы $\cos\frac{1}{n}$ был рациональным, то рациональным был бы и $\cos(n\cdot\frac{1}{n}) = \cos 1$, а это не так.

Впрочем, не удается таким же образом доказать, что $\sin\frac{1}{n}$ иррационален (ведь если $\sin\alpha$ рационален, то не обязательно рационален $\sin n\alpha$). Но можно непосредственно опереться на неравенство (1). Предположим противное, – что $\sin\frac{1}{n}$ рационален, $\sin\frac{1}{n} = \frac{p}{q} = \frac{4p}{4q}$. В неравенстве (1) положим $x = \frac{1}{n}$, $m = q$. Тогда

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+\dots+\frac{1}{(4q-1)!n^{4q-1}}<\frac{4p}{4q}<\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+\dots-\frac{1}{(4q-1)!n^{4q-1}}+\frac{1}{(4q+1)!n^{4q+1}}.$$

Умножив это неравенство на $(4q+1)!n^{4q+1}$, получаем, что целое число $4p(4q-1)!(4q+1)n^{4q+1}$ оказывается между целыми числами

$$N = (4q+1)!n^{4q} - \frac{(4q+1)!n^{4q-2}}{3!} + \frac{(4q+1)!n^{4q-4}}{5!} - \dots - \frac{(4q+1)!n^2}{(4q-1)!}$$

и $N+1$, а этого быть не может.

Разумеется, таким же образом можно доказывать иррациональность $\cos\frac{1}{n}$ – при этом нам не понадобилась бы формула для $\cos n\alpha$ (или ее следствия).

К сожалению, таким методом не удается доказать, что иррациональны, например, $\sin 2$ или $\cos\frac{2}{7}$. На самом же деле верно, что значения $\sin r$, $\cos r$, $\operatorname{tg} r$ (число r рационально и не равно 0) всегда иррациональны. Но это намного более трудная задача.

Вернемся к числу e. В статье [3] показано, как при помощи теории пределов можно доказать, что число e иррационально. Разумеется, проще воспользоваться производными.

Докажем неравенство Тейлора ($x > 0$) для функции e^{-x} (для функции e^{x} оно гораздо сложнее – см. [2]):

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\dots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}<\mathrm{e}^{-x}<1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\dots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{11}$$

Его доказательство совершенно аналогично доказательству неравенств (1) и (2). Поскольку $\mathrm{e}^{-x} < 1$, то производная функции $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 + x$, равная $-\mathrm{e}^{-x} + 1$, положительна, поэтому $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x > f(0) = 0$, т.е. $1 - x < \mathrm{e}^{-x}$. Однако производная функции $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!}$ равна $-\mathrm{e}^{-x} + 1 - x$ и отрицательна, поэтому $\mathrm{e}^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} < 0$, а значит $\mathrm{e}^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}$. Продолжая процедуру, получаем формулу (11).

Если доказывать формулу (11) строго, методом математической индукции, то ее удобно записать в следующем виде:

$$(-1)^m\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\dots+(-1)^m\frac{x^m}{m!}-\mathrm{e}^{-x}\right)>0 \tag{12}$$

(при $m = 2n-1$ получаем левую часть неравенства (11), а при $m = 2n$ – правую). При $m = 1$ имеем уже доказанное неравенство $1-x < \mathrm{e}^{-x}$. Если оно уже доказано для m, то оно справедливо и для $m+1$:

$$(-1)^{m+1}\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^m}{m!}-(-1)^{m+1}\frac{x^{m+1}}{m!}-\mathrm{e}^{-x}\right)>0.$$

В самом деле, левая часть последнего неравенства возрастает, поскольку ее производная положительна в силу неравенства (12).

Теперь положим $x = 1$ в неравенстве (11):

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{(2n-1)!}<\mathrm{e}^{-1}<1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n)!}. \tag{13}$$

Отсюда уже вытекает, что e – число иррациональное. Предположим противное, – что e рационально, $\mathrm{e} = \frac{q}{p}$ $(q, p \in \mathbb{N})$. Тогда $\mathrm{e}^{-1} = \frac{p}{q} = \frac{2p}{2q}$. Полагая в неравенстве (13) $n = q$, получаем

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{(2q-1)!}<\frac{2p}{2q}<1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{(2q-1)!}+\frac{1}{(2q)!}.$$

Умножим неравенство на $(2q)!$. Тогда

$$(2q)!-\frac{(2q)!}{1!}+\cdots-\frac{(2q)!}{(2q-1)!}<2p(2q-1)!<(2q)!-\frac{(2q)!}{1!}+\cdots-\frac{(2q)!}{(2q-1)!}+1.$$

В левой и правой частях неравенств стоят два последовательных целых числа, и между ними не может втиснуться целое число. Противоречие.

Из иррациональности числа e с очевидностью следует, что иррациональны и числа $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, $\pm n \in \mathbb{N}$ (т.е. числа $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\sqrt{\mathrm{e}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ и т.п.). Однако доказать иррациональность чисел e^n (а тем самым и e^r, $r \in \mathbb{Q}$) значительно труднее.

Литература

[1] Ю. Мачис, Об иррациональности значений тригонометрических функций, *Liet. matem. rink.*, **42** (spec. nr.), 405–410 (2002).

[2] Н. Виленкин, О. Ивашев-Мусатов, С. Шварцбурд, *Алгебра и математический анализ. Учебник для школ с усиленным изучением математики*, ч. 1, ч. 2. Москва, Просвещение (1983, 1984).

[3] Ю. Мачис, Почему число e иррационально? *Alfa plius Omega*, **3**, 56–61 (2002) (на литовском языке).

Apie skaitinio argumento trigonometrinių funkcijų reikšmes

J. Mačys

Elementariai įrodyta, kad reikšmės sin 1, cos 1, taip pat sin $\frac{1}{n}$, cos $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (argumentas skaitinis) iracionalios.