Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 370–373

Paradoksų įtaka matematikos raidai

Livija MALIAUKIENĖ (VPU)
el. paštas: maliaukiene@vpu.lt

XIX a. matematikos raida, naujų aksiomatinių teorijų atsiradimas ir geresnis aksiomatizavimo esmės supratimas, kurį iš dalies lėmė ir, pavyzdžiui, darbai iš neeuklidinės geometrijos, sužadino naujų atradimų viltis.

Žymus vokiečių matematikas Gotlobas Frege 1902 m. baigė savo "Aritmetikos pagrindų" antrąjį tomą, kuriame išdėstė neprieštaringą aibių teoriją, kuri galėjo būti visos matematikos pagrindas. Rankraštis jau buvo spaustuvėje, kai Frege gavo Bertrano Russell'o laišką, kuriame Russell'as pranešė apie rastąjį paradoksą, kurį jis įvilko į linksmą rūbelį, pavadindamas jį barzdaskučio paradoksu:

Skelbimas: „Miestelio barzdaskutys skuta tik tuos vyrus, kurie nesiskuta patys“ – tuomet kas skuta barzdaskutį?

I-a galimybė: barzdaskutys skutasi pats, tuomet jis priklauso tiems gyventojams, kurių, remiantis skelbimu, jis negali skusti, taigi, barzdaskutys negali pats skustis. Gavome prieštarą.

II-a galimybė: barzdaskutį skuta kas nors kitas, tuomet barzdaskutys priklauso tiems gyventojams, kurie nesiskuta patys, todėl, remiantis skelbimu, jis turi save skusti. Gavome prieštarą.

Matyt, kad šio barzdaskučio negali skusti niekas!

Aibių teorijoje: Panagrinėkime aibę visų aibių, kurios nėra savęs elementas. Ar ši aibė yra savęs elementas? Kaip beatsakytume, neišvengsime prieštaros!

Vienas iš Russell'o paradokso sprendimo būdų – pripažinti, kad apibrėžimas „visų aibių, nesančių savęs elementais, aibė“ – neapibrėžia šios aibės. Radikalesnis šios problemos sprendimas – uždrausti aibių teorijoje nagrinėti aibes, kurios yra savęs elementai.

Tačiau nei vienas sprendimas nėra toks, su kuriuo visi sutiktų, nes tai nėra paprastos mokiniškos klaidos suradimas įrodyme. Paradoksų sprendimas reikalauja kardinalių teorijos pertvarkymų, ir tuomet sunkumai jau atsiranda aukštesniame lygmenyje. Pavyzdžiui, jei mes uždrausime visų aibių aibę, tai kirsis su Kantoro aibės apibrėžimu. Kad iš viso egzistuotų aibių teorija, reikia turėti teoremas, tinkančias visoms aibėms, o visos aibės, pagal Kantorą, sudaro aibę. Jei tai ne taip, mes turime nurodyti kitą aibės apibrėžimą, arba papildyti turimąjį kažkokiais kriterijais, nurodančiais, kuomet elementų visuma sudaro aibę.

Todėl 1910–1913 Bertrand Russell'as ir Alfred'as N. Whitehead'as išleido tris tomus „Principia Mathematica“, kuriuose buvo pabandyta matematikos pagrindu laikyti nedidelį skaičių aksiomų bei išvedimo taisyklių. Davido Hilberto siekis visą matematiką pateikti kaip formalią neprieštaringą teoriją, kurioje kiekvienam teiginiui A, užrašomam šios teorijos kalbos pagalba, egzistuotų arba A įrodymas, arba $\neg A$ įrodymas, atrodė toks artimas.

Tačiau pagrindiniai dalykai, apibūdinantys formaliąją sistemą yra : 1) sistemos neprieštaringumas, 2) sistemos pilnumas.

Priminsime, kad:

1) sistema vadinama *neprieštaringa*, jei joje nėra tokios formulės A, kad šioje sistemoje būtų įrodoma ir A, ir $\neg A$.
2) sistema vadinama *pilna*, jei kiekviena teisinga šios sistemos formulė yra įrodoma šioje sistemoje.

Dabar grįžkime prie paradoksų ir panagrinėkime tvirtinimą „Šis teiginys yra klaidingas“, kuris yra melagio paradokso varijantas. Ar šis teiginys teisingas, ar klaidingas? Žinome, kad kiekvienas atsakymas duoda prieštarą. Taigi, turime teiginį, kurio teisingumo reikšmės negalima nustatyti remiantis, pavadinkime tai, paprasta logika. Elegantiškai genialus Kurto Gödel'io sumanymas – pertvarkyti šį paradoksą į teiginį, formuluojamą Peano aritmetikos, t.y. natūrinių skaičių aritmetikos terminais ir parodyti, kad nei šis teiginys, nei jo neigimas neįrodomi Peano aritmetikoje.

Nesigilindami į matematinius bei loginius Gödel'io samprotavimų sunkumus, panagrinėkime dalyką, kuris yra esminis šiuose samprotavimuose. Teiginys A, kuris reiškia, kad A neįrodomas, – skelbia tam tikrą informaciją apie save, tuo tarpu kai Peano aritmetikos teiginiai apibūdina natūrinių skaičių savybes. Aritmetikos nepilnumo įrodymo esmė – Kurto Gödel'io sumanymas koduoti šios teorijos simbolius, formules (jas galima laikyti tam tikromis simbolių sekomis) bei įrodymus (juos galime laikyti formulių sekomis) natūrinių skaičių pagalba. Gödel'is naudojo šiuos simbolius: 0 (nulis), S (sekantis po), $\sim$ (neigimas), V (arba), $\forall$ (visuotinumo kvantorius), ((kairysis skliaustas),) (dešinysis skliaustas).

Kiekvienam aritmetikos simboliui K.Gödel'is priskyrė skirtingą nelyginį $\leqslant 13$ skaičių (išvardintų simbolių kodai yra atitinkamai $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$),

kiekvienam skaitiniam kintamajam – pirminį skaičių, > 13,

kiekvienam kintamajam, atitinkančiam skaičių aibę (t.y. vienviečiam predikatui) – pirminio skaičiaus , didesnio už 13, kvadratą,

kiekvienai aibių aibei (pvz. dviejų argumentų sąryšiui) – trečiąjį laipsnį pirminio skaičiaus > 13 ir t.t.

Formulę, kuri yra simbolių su numeriais $n_1, n_2, ..., n_k$ seka, atitks skaičius $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$,čia p_k — k-tasis pirminis skaičius. Tegu dabar turime įrodymą, kuris yra formulių su numeriais $m_1, m_2, ..., m_r$ seka, tuomet šio įrodymo skaičius $2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$.

Toks kodavimo būdas duoda vienareikšmiškumo garantiją, netgi abipusio vienareikšmiškumo garantiją: ne tik kiekvienam simboliui, formulei ir įrodymui yra priskiriamas tam tikras vienas skaičius, bet ir atvirkščiai, iš kiekvieno skaičiaus, esančio kodu, galima vienareikšmiškai nustatyti objektą (simbolį, formulę ar įrodymą), kuris šiuo skaičiumi yra užkoduotas. Todėl teiginiai apie formules turi „atvaizdus“ teiginiuos apie skaičius, ir atvirkščiai. Kurtas Gödel'is parodė, kaip tas atitinkamybes konstruoti.

Dabar belieka tik aritmetikos kalba užrašyti formulę $A(x)$, teigiančią, kad x yra numeris neįrodomos formulės, ir vietoj x įstatyti $A(x)$ numerį.

Tokiu būdu, jei norim įrodyti kokios nors teorijos neprieštaringumą, reikia įrodyti tam tikrą teiginį apie šią teoriją, o taip pat apie visus galimus teoremų įrodymus šioje teorijoje. O tai reiškia, kad matematinė teorija, kurios neprieštaringumą bandome įrodyti, pati tampa tyrimo objektu tam tikros matematikos, kurią Hilbertas pavadino „metamatematika" arba „įrodymų teorija".

Taigi mūsų ieškoma formulė A yra analogiška teiginiui iš Epimenido paradokso, tačiau čia galima paradokso išvengti.

Pagal A konstrukciją:

(1) A reiškia, kad A neįrodoma.

Tarkim, kad formulės, kurios yra klaidingi teiginiai, neįrodomos mūsų sistemoje, t.y.

(2) klaidingos formulės neįrodomos.

Tuomet A *negali būti klaidinga*, nes jei ji klaidinga, tai reiškia, kad ji neįrodoma, nes klaidingos formulės, pagal (2), nėra įrodomos.

Jei A teisinga, tai reiškia, kad ji neįrodoma.

Tuo būdu, *sistema nėra pilna* ta prasme, kad ne kiekvienai teisingai tos sistemos formulei $\exists$ jos įrodymas.

Šios formulės neigimas $\neg A$ *taip pat neįrodomas*, nes $\neg A$ – klaidinga formulė (įrodėm, jog A – teisinga), o pagal (2) – klaidingos formulės nėra įrodomos.

Tai – tik Gödel'io samprotavimų, naudotų įrodinėjant sekančias dvi teroemas, schema.

1 teorema (Gödel'io). *Jei sistema PA yra neprieštaringa, tai neįrodoma $A_p(\mathrm{p})$, jei ši sistema ω – neprieštaringa, tai neįrodoma $\neg A_p(\mathrm{p})$. Tokiu būdu, jei sistema PA ω – neprieštaringa, tai ji nepilna ir $A_p(\mathrm{p})$ yra neišsprendžiamos formulės pavyzdys.*

Priminsime, kad simboliu PA žymima Peano aritmetika, o formali sistema vadinama ω – neprieštaringa, jei bet kokiam x ir formulei $A(x)$ sekantys tvirtinimai visi kartu nėra teisingi:

$\vdash A(0), \vdash A(1), \vdash A(2), \ldots, \vdash \neg\forall x\, A(x)$.

2 teorema (Gödel'io). *Jeigu sistema PA neprieštaringa, tai neegzistuoja jos neprieštaringumo įrodymas, gaunamas šioje sistemoje formalizuojamų priemonių pagalba.*

Pastebėsime, kad metamatematika tampa natūrinių skaičių aritmetikos dalimi, jei pasirenkama kokia nors formalių objektų numeracija, t.y. kai skirtingiems sistemos objektams priskiriami (skirtingi) natūriniai skaičiai. Egzistuoja įvairios Gödelio tipo Peano aritmetikos numeracijos, pvz. $\supset, \&, V, \neg, \forall, \exists, =, +, \cdot, ', 0, a, |$ (išvardintų simbolių kodai atitinkamai yra 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27), pateikta S.C.Kleene [3]. Panaši numeracija 1939 m. buvo įvesta Hilbert'o ir Bernays'o [4].

Literatūra

[1] B. Russel, *Principia Mathematica*, Part 8, Cambridge, Cambr. Univ. Press (1910–1913).
[2] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 1, Publications 1929–1936, Oxford Univ. Press (1986).

[3] S.C. Kleene, *Introduction to Mathematics*, Van Nostrand, Princeton (1952).
[4] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2, Berlin, Springer (1939).
[5] M. Gardner, *The Paradox of the Unexpected Hanging*, in: The Unexp. Hanging and Other Math.m Dives, N.Y. (1968).

The influence of the paradoxes on the development of a mathematical results

L. Maliaukienė

In the paper the influence of the paradoxes on the development of a mathematical rezults from the historic standpoint is investigated, including especial importance K.Gödel's rezults in the sphere of the provability of the consistency the Peano's arithmetic.