Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 666–670

Dinaminių poslinkio sistemų taikymas sintezuojant fraktalinius vaizdus

Jonas VALANTINAS, Rokas VALANTINAS, Tomas ŽUMBAKIS (KTU)
el. paštas: valanti@if.ktu.lt

1. Įvadas

Fraktalinėms vaizdų apdorojimo technologijoms pastaruoju metu tenka ypač didelis dėmesys. Sukurtos efektyvios fraktalinio vaizdų kodavimo (suspaudimo) strategijos [1, 2], vystoma fraktalinio modeliavimo teorija [3], vaizdų analizės ir sintezės srityje gana plačiai taikomas fraktalinės geometrijos aparatas [4, 5].

Dirbant su kompiuteriniais realaus pasaulio vaizdų analogais (skaitmeniniais vaizdais), fraktalinis požiūris ypatingai vertingas ir perspektyvus, kadangi jis leidžia geriau ir pilniau suvokti bei įvertinti informacinį tokių vaizdų turinį.

Žemiau glaustai pateikiamas kontekstas (pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai), kuriame sprendžiama fraktalinių vaizdų, tapatinamų su iteruotųjų funkcijų sistemų atraktoriais, sintezės problema. Pagrindinis dėmesys skiriamas dinaminei poslinkių sistemai (DPS), generuojančiai fraktalinį vaizdą (atraktorių). Siūloma nauja originali praktinio DPS įgyvendinimo strategija.

2. Fraktalas – iteruotųjų funkcijų sistemos atraktorius

Imkime euklidinę metrinę erdvę (R^2, d). Jos bazėje sukonstruokime naują (fraktalinę) erdvę $(H(\mathrm{R}^2), h)$, kur $H(\mathrm{R}^2)$ yra visų netuščiųjų uždarųjų erdvės R^2 poaibių aibė, o h – atstumas (metrika) tarp bet kurių dviejų aibės $H(\mathrm{R}^2)$ elementų (poaibių) A ir B, nusakomas išraiška $h = \max\{d(A,B), d(B,A)\}$, kai

$$d(A,B) = \max_{x\in A}\Big\{\min_{y\in B}\{d(x,y)\}\Big\}, \quad d(B,A) = \max_{y\in B}\Big\{\min_{x\in A}\{d(y,x)\}\Big\}.$$

Tarkime, kad ω_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ žymi suspaudžiančiąją afiniąją transformaciją erdvėje (R^2, d), o skaičius s_i $(0 \leqslant s_i < 1)$ nusako jos suspaudimo koeficientą.

Metrinė erdvė (R^2, d) kartu su joje apibrėžtų suspaudžiančiųjų afiniųjų transformacijų rinkiniu $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ vadinama iteruotųjų funkcijų sistema (IFS) ir žymima IFS $\{\mathrm{R}^2; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$.

Fraktalinėje erdvėje $(H(\mathrm{R}^2), h)$ nagrinėkime naują suspaudžiančiąją transformaciją $W\colon H(\mathrm{R}^2) \to H(\mathrm{R}^2)$, būtent:

$$W(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \ldots \cup \omega_N(B) = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(B), \quad \forall B \in H(\mathrm{R}^2).$$

Iteruotųjų funkcijų sistemos IFS $\{R^2; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ atraktorius (fraktalas, fraktalinis vaizdas) apibrėžiamas kaip vienintelis pritraukiantysis nejudamasis transformacijos $W\colon H(R^2) \to H(R^2)$ taškas A ($A \in H(R^2)$ toks, kad [5]

$$\begin{aligned} A = W(A) &= \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(A) = \lim_{n\to\infty} (W \circ W \circ \ldots \circ W)(B) \\ &= \lim_{n\to\infty} (W^{0n}(B), \quad \forall B \in H(R^2). \end{aligned}$$

3. Fraktalinių vaizdų (IFS atraktorių) sintezės algoritmai

Tarp dažniausiai minimų IFS atraktorių sintezės (generavimo) algoritmų yra šie: determinuotasis algoritmas, atsitiktinių iteracijų algoritmas, pabėgimo laiko algoritmas. Savo specifika gana įdomus trečiasis (pabėgimo laiko) algoritmas, kuris, paprastai, yra naudojamas netiesinių atvaizdžių, veikiančių kompleksinėje plokštumoje, analizei. Atskirai fraktalinių vaizdų klasei – IFS atraktoriams – pabėgimo laiko algoritmas iki šiol nėra pilnai adaptuotas, nors jo veikimas apibrėžtas ir pilnai suvokiamas. Pateikiame trumpą algoritmo aprašą:

1. Duota IFS $\{R^2; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, kurios atraktorius yra aibė $A \in H(R^2)$.

2. Konstruojama duotąją IFS atitinkanti dinaminė poslinkių sistema $\{A; S\}$; čia poslinkių transformacija $S\colon A \to A$ apibrėžiama išraiškomis: $S(a) = \omega_i^{-1}(a)$, kai $a \in \omega_i(A)$ ir $a \notin \cup_{j(j\neq i)} \omega_j(A)$(taškas a yra ω_i veikimo zonoje; $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$); $S(a) = \omega_{i_t}^{-1}(a)$, kai $a \in \omega_{i_1}(A) \cap \omega_{i_2}(A) \cap \ldots \cap \omega_{i_r}(A)$, (taškas a yra bet kurios iš transformacijų ω_{i_t} veikimo zonoje; $i_t \in \{1, 2, \ldots, N\}, t = 1, 2, \ldots, r$).

3. Dinaminės sistemos $\{A; S\}$ veikimas praplečiamas į visą erdvę R^2, t.y., konstruojamas jos plėtinys $\{R^2; \widehat{S}\}$. Transformacija $\widehat{S}\colon R^2 \to R^2$ nusakoma lygybe $\widehat{S}(P) = \omega_i^{-1}(P)$, kai taškas $P(P \in R^2)$ priklauso ω_i ($i \in \{1, 2, \ldots, N\}$) veikimo zonai.

4. Žinant, jog IFS atraktorius A patenka į stačiakampį $\square$, t.y., $A \subset \square \subset R^2$, pastarojo taškams P skaičiuojamos jų orbitos – $\{\widehat{S}^{0n}(P)\}_{n=1}^{\Im}$; čia $\Im$ – tiksliniai apibrėžtas orbitos taškų (iteracijų) skaičius.

5. Parenkamas pakankamai didelio spindulio R skritulys, talpinantis savyje stačiakampį $\square$. Skritulio centras, dažniausiai, tapatinamas su stačiakampio simetrijos centru (tašku O). Jeigu $d(\widehat{S}^{0\Im}(P), O) \leqslant R$, t.y., taško $P \in \square$ orbita nepalieka skritulio, tai daroma išvada, jog taškas P priklauso atraktoriui A, priešingu atveju ($d(\widehat{S}^{0\Im}(P), O) > R$) – $P \notin A$.

Pagrindinė kliūtis, dėl kurios pabėgimo laiko algoritmas iki šiol nėra adaptuotas fraktalinių vaizdų, tapatinamų su IFS atraktoriais, sintezei, yra ši – nėra kriterijaus, įgalinančio nustatyti afiniųjų transformacijų, kurių bazėje konstruojamos dinaminės poslinkių sistemos ir jų plėtiniai, veikimo zonas. Tiesa, specialioje literatūroje užsimenama apie šios kliūties pašalinimą. Pavyzdžiui, visiškai nejungiosioms IFS afiniųjų transformacijų veikimo zonų atskyrimą siūloma atlikti tiesių pagalba [5]. Tačiau, kiek žinoma, bandymai eiti šiuo keliu nebuvo sėkmingi.

Žemiau pateikiama nauja ir praktiškai įgyvendinama afiniųjų transformacijų veikimo zonų euklidinėje plokštumoje atskyrimo strategija (kriterijus), leidžianti pritaikyti pabėgimo laiko algoritmą fraktalinių vaizdų (IFS atraktorių) sintezei.

4. Afiniųjų transformacijų veikimo zonų nustatymas

Tarkime, kad $\{R^2; \widehat{S}\}$ yra su IFS $\{R^2; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ susietos dinaminės poslinkių sistemos $\{A; S\}$ plėtinys į erdvę R^2. Kaip jau buvo minėta anksčiau, transformacija $\widehat{S}$ bet kokį tašką $P \in R^2$ atvaizduoja į naują tašką $P_i = \widehat{S}(P) = \omega_i^{-1}(P)$, kai taškas P priklauso transformacijos ω_i $(i \in \{1, 2, \ldots, N\})$ veikimo zonai. Teorine prasme, afiniųjų transformacijų veikimo zonų atskyrimui puikiai tinka kriterijus

$$KRIT = \min_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} \{d(P, \omega_i(A))/s_i\} = \min_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} \{d(P_i, A)\}$$

(indeksas i, suteikiantis kriterijui *KRIT* minimalią reikšmę, nurodo afiniąją transformaciją, kurios veikimo zonoje yra taškas P). Deja, praktinė šio kriterijaus realizacija sudėtinga, kadangi nėra žinomas IFS atraktorius A.

Formalizuokime pabėgimo laiko algoritmą. Imkime sutvarkytųjų indeksų rinkinių aibę $I(\Im) = \{(i_1, i_2, \ldots, i_\Im) \,|\, i_k \in \{1, 2, \ldots, N\}, k = 1, 2, \ldots, \Im\}$. Akivaizdu, jog aibės $I(\Im)$ elementų skaičius lygus $N^\Im$. Fiksavus aibės $I(\Im)$ elementą (rinkinį) $(i_1, i_2, \ldots, i_\Im)$, bet kuriam taškui $P \in R^2$ galima užrašyti jo orbitą (seką), susidedančią iš $\Im$ taškų, būtent: $\{P_{i_1}, P_{i_1,i_2}, \ldots, P_{i_1,i_2,\ldots,i_\Im}\}$, kur $P_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = (\omega_{i_k}^{-1} \circ \ldots \circ \omega_{i_2}^{-1} \circ \omega_{i_1}^{-1})(P)$, su visais $k \in \{1, 2, \ldots, \Im\}$. Pagaliau, teisingai parinkus skritulio, talpinančio savyje stačiakampį $\square$ $(A \subset \square)$, spindulį R bei iteracijų skaičių $\Im$, galėtume teigti, jog taškas P $(P \in \square)$ priklauso IFS atraktoriui A, kai

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min\{d(P_{i_1,i_2,\ldots,i_\Im}, A) \,|\, (i_1, i_2, \ldots, i_\Im) \in I(\Im)\} \\ &= d(P_{i_1^\circ,i_2^\circ,\ldots,i_\Im^\circ}, A) \leqslant R; \end{aligned} \tag{1}$$

priešingu atveju $(d_{\min} > R)$, $P \notin A$. Aišku, kad rinkinys $(i_1^\circ, i_2^\circ, \ldots, i_\Im^\circ) \in I(\Im)$ atitinka atvejį, kai kiekvienam orbitos $\{\widehat{S}^{0n}(P)\}_{n=1}^{\Im}$ taškui yra tiksliai fiksuojama afiniosios transformacijos veikimo zona.

Kadangi $diam(A) << R$, tai (1) sąlygą galima perrašyti taip:

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min\{d(P_{i_1,i_2,\ldots,i_\Im}, O) \,|\, (i_1, i_2, \ldots, i_\Im) \in I(\Im)\} \\ &= d(P_{i_1^\circ,i_2^\circ,\ldots,i_\Im^\circ}, O) \leqslant R. \end{aligned} \tag{2}$$

Tiesioginė šio formalaus požiūrio realizacija yra problematiška, kadangi didėjant iteracijų skaičiui $\Im$, aibės $I(\Im)$ galia gana sparčiai auga.

Žemiau pateikiamas originalus IFS sudarančių afiniųjų transformacijų veikimo zonų erdvėje (R^2, d) atskyrimo (tuo pačiu, (2) sąlygos praktinio įgyvendinimo) strategija (kriterijus). Siūlomo kriterijaus esmė – su bet kuria reikšme k $(k \in \{1, 2, \ldots, \Im\})$, nuosekliai formuojamos orbitos taškas $P_{i_1^\circ,i_2^\circ,\ldots,i_k^\circ}$ priklauso transformacijos $\omega_{i_{k+1}^\circ}$ $(i_{k+1}^\circ \in \{1, 2, \ldots, N\})$ veikimo zonai, jeigu:

$$\begin{aligned} &\min\Big\{d(P_{i_1^\circ,\ldots,i_k^\circ,i_{k+1},\ldots,i_{k+\tau}}, P_{i_1^\circ,\ldots,i_k^\circ}) \,\Big|\, i_{k+1}, \ldots, i_{k+\tau} \in \{1, 2, \ldots, N\}\Big\} \\ &= \min\Big\{d(P_{i_1^\circ,\ldots,i_{k+1}^\circ,i_{k+2},\ldots,i_{k+\tau}}, P_{i_1^\circ,\ldots,i_k^\circ}) \,\Big|\, i_{k+2}, \ldots, i_{k+\tau} \in \{1, 2, \ldots, N\}\Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Kitaip tarus, orbitos taškų patekimo į vienos ar kitos afiniosios transformacijos veikimo zoną nustatymui siūloma naudoti "τ žingsnių į priekį" strategiją ($2 \leqslant \tau \leqslant N$). Ši strategija grindžiama dviem faktoriais (nesunku įrodyti):

- bet kuriam erdvės taškui $P \in \mathrm{R}^2$ ir jo vaizdui $P_i = \omega_i^{-1}(P)$ ($i \in \{1, 2, \ldots, N\}$) teisinga nelygybė

$$d(P_i, P) \geqslant d(P, A) \cdot (1 - s)/s, \quad s = \max\{s_i | i = 1, 2, \ldots, N\},$$

  leidžianti daryti išvadą, kad taškui P tolstant nuo atraktoriaus A, atstumas tarp taškų P ir P_i, taipogi, didėja;

- su bet kuria reikšme k ($k \in \{1, 2, \ldots, \Im - 1\}$), teisingas sąryšis (išplaukia iš (1) sąlygos)

$$\begin{aligned} &d(P_{i_1^\circ, i_2^\circ, \ldots, i_\Im^\circ}, A) \\ &= \min\left\{d(P_{i_1^\circ, \ldots, i_k^\circ, i_{k+1}, \ldots, i_\Im}, A) \middle| (i_1^\circ, \ldots, i_k^\circ, i_{k+1}, \ldots, i_\Im) \in I(\Im)\right\}, \end{aligned}$$

  teigiantis, jog taško $P \in \Box$ orbitą $\{\widehat{S}^{0n}(P)\}_{n=1}^{\Im}$ galima formuoti nuosekliai.

Siūlomo kriterijaus ((3) išraiška) privalumas tas, kad formuojant stačiakampio $\Box \subset \mathrm{R}^2$ taškų P orbitas, nereikia atlikinėti pilnojo perrinkimo – pakanka apibrėžti visas galimas afiniųjų transformacijų superpozicijas $\omega_{i_1, i_2, \ldots, i_\tau}^{-1}: R^2 \to R^2$, kur $\omega_{i_1, i_2, \ldots, i_\tau}^{-1}(P) = (\omega_{i_\tau}^{-1} \circ \ldots \circ \omega_{i_2}^{-1} \circ \omega_{i_1}^{-1})(P)$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $k = 1, 2, \ldots, \tau$, ir jas vėliau naudoti kriterijaus ((3) išraiška) reikšmių apskaičiavimui. Pastebėsime, jog bendras tokių superpozicijų skaičius lygus N^τ. Būtina pabrėžti, kad siūlomas kriterijus ((3) išraiška) gerai "dirba", kai IFS sudarančių afiniųjų transformacijų ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, suspaudimo koeficientų reikšmės nėra stipriai išsibarstę ($|s_i - s_j| \leqslant \Delta, i, j = 1, 2, \ldots, N; \Delta = 0 - 0,2$). Priešingu atveju, sintezuojamų fraktalinių vaizdų kokybės pagerinimui, prieš taikant kriterijų ((3) išraiška), reiktų įvesti atstumo $d(P_{i_1^\circ, i_2^\circ, \ldots, i_\Im^\circ}, P)$, $(i_1^\circ, i_2^\circ, \ldots, i_\Im^\circ) \in I(\Im)$, normavimą, priklausomai nuo afiniųjų transformacijų panaudojimo dažnio. Detaliau šis atvejis straipsnyje nenagrinėjamas.

Sudarytasis afiniųjų transformacijų veikimo zonų nustatymo kriterijus bei atskirai fraktalinių vaizdų klasei (IFS atraktoriams) adaptuota pabėgimo laiko algoritmo versija realizuoti programiškai (programavimo kalba C#.NET; Rokas Valantinas, Informatikos mokslo magistras).

5. Išvados

Žinomi įvairūs fraktalinių vaizdų, tapatinamų su iteruotųjų funkcijų sistemų (IFS) atraktoriais, sintezės algoritmai (determinuotasis, atsitiktinių iteracijų, pabėgimo laiko). Pats universaliausias yra pabėgimo laiko algoritmas, kuris daugiausiai taikomas netiesinių atvaizdžių, veikiančių kompleksinėje plokštumoje, analizei ir vizualizavimui. Deja, IFS atraktorių sintezei šis algoritmas iki šiol nėra pilnai adaptuotas. Priežastis – sudėtingas ir pakankamai keblus IFS sudarančių afiniųjų transformacijų veikimo zonų euklidinėje plokštumoje nustatymas.

Straipsnyje pateikiamas naujas originalus afiniųjų transformacijų veikimo zonų atskyrimo kriterijus, leidžiantis pritaikyti pabėgimo laiko algoritmą fraktalinių vaizdų (IFS atraktorių) sintezei. Kriterijus grindžiamas dinaminės poslinkių sistemos, susietos su IFS, nuoseklaus realizavimo principu.

Atlikta programinė sudarytojo kriterijaus ir adaptuotos pabėgimo algoritmo versijos realizacija. Preliminarūs eksperimento rezultatai patvirtina teorinių samprotavimų teisingumą.

Literatūra

[1] Y. Fisher, *Fractal Image Compression – Theory and Application*, Springer-Verlag, New York (1994).
[2] J. Valantinas, N. Morkevičius, T. Žumbakis, Accelerating compression times in block-based fractal image coding procedures, in: *Proceedings of the 20th Eurographics UK Conference*, IEEE Computer Society Press, Leicester, De Montfort university, UK (2002), pp. 83–88.
[3] M.J. Turner, J.M. Blackledge, P.R. Andrews, *Fractal Geometry in Digital Imaging*, Academic Press, Cambridge (1998).
[4] P. Heinz-Otto, H. Jurgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals*, Springer–Verlag (1992).
[5] M.F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, APP, Cambridge (1993).

Synthesizing fractal images by means of shift dynamical systems

J. Valantinas, R. Valantinas, T. Žumbakis

In this paper, the adaptation problem of the time escape algorithm to the special class of fractal images (attractors of iterated function systems) and the necessary mathematical context are analysed. A new original idea for the practical implementation of shift dynamical systems, used in synthesizing fractal images (attractors), is proposed.