Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 75–78

Apie apibendrintas Kartano erdvių struktūras

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
el. paštas: edmundas@vpu.lt

Sakykime, kad T^*V^n yra n-matės glodžios daugdaros V^n koliestinė sluoksniuotė. Jos lokaliosios koordinatės (x^i, y_i) keičiasi pagal dėsnį (žr. [2]),

$$\bar{x}^i = f^i(x^k), \quad \bar{y}_i = g_i^k y_k, \quad i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

čia $f_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$, $g_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$ ir $f_k^i g_j^k = \delta_j^i$.

Kartano erdve vadinama n-matė glodi daugdara V^n, kurios koliestinėje sluoksniuotėje T^*V^n apibrėžta skaliarinė funkcija H: $T^*V^n \longrightarrow R$. Ši funkcija yra antrojo laipsnio homogeninė y_i atžvilgiu, o jos hesianas $det\|\frac{\partial^2 H(x^k, y_h)}{\partial y_i \partial y_j}\|$ nelygus nuliui [3]. Pažymėję $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial^i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ apibrėžiame Kartano erdvės metrinį tenzorių $g^{ij} = \frac{1}{2}\partial^i\partial^j H$ ir Kartano tenzorių $C^{ijk} = \frac{1}{2}\partial^k g^{ij}$, kuriems yra teisingos lygybės

$$y_k g^{ik} = \frac{1}{2}\partial^i H, \quad y_i y_j g^{ij} = H, \quad y_k C^{ijk} = 0. \tag{2}$$

Jei g_{ik} yra tenzoriui g^{kj} atvirkštinio tenzoriaus komponentės, o γ_{ij}^k – šio tenzoriaus Kristofelio simboliai, tai dydžiai L_{ij} apibrėžiami lygybe

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}^k y_k - \frac{1}{2}\gamma_{pq}^k y_k \partial_h g^{pq} \partial^h g_{ij}, \tag{3}$$

yra Kartano erdvės tiesinės sieties objekto komponentės. Tuomet pažymėję $\Gamma_{ij}^k = \partial^k L_{ij}$, gausime, jog trejetas $(L_{ij}, \Gamma_{ij}^k, 0)$ yra Kartano erdvės afininės sieties objektas; ši afininė sietis vadinama Mirono sietimi. Jei $\delta_i = \partial_i - L_{ik}\partial^k$ – invariantinė išvestinė, tai Mirono sieties kreivumo tenzorių komponentės išreiškiamos taip:

$$R_{kij} = 2\delta_{[j} L_{i]k}, \quad R_{jpq}^i = -\partial^i R_{jpq}, \quad S_{jk}^{ip} = \partial^i \partial^p L_{jk}. \tag{4}$$

Kartano erdvės metrinė afininė sietis (Kartano afininė sietis) pasižymi tuo, kad metrinio tenzoriaus kovariantinė išvestinė šios sieties atžvilgiu lygi nuliui. Metrinę afininę sietį apibrėžia trejetas $(L_{ij}, \Pi_{ij}^k, C_j^{ik})$, čia

$$\Pi_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kp}(\delta_j g_{ip} + \delta_i g_{jp} - \delta_p g_{ij}), \quad C_j^{ik} = \frac{1}{2}g_{jp}C^{ikp}. \tag{5}$$

Šios afininės sieties kreivumo tenzorių komponentės išreiškiamos taip:

$$
\begin{aligned}
&P^i_{jpq} = 2(\delta_{[p}\Pi^i_{|j|q]} + \Pi^k_{j[p}\Pi^i_{|k|q]} + C^{ik}_j R_{kpq}),\\
&K^{ip}_{jq} = \delta_q C^{ip}_j - \partial^p \Pi^i_{jq} + C^{kp}_j \Pi^i_{kq} - C^{ip}_k \Pi^k_{jq} + L_{hq}\partial^h C^{ip}_j,\\
&M^{ipq}_j = 2(\partial^{[p} C^{q]i}_j + C^{k[p}_j C^{q]i}_k).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Pažymėję $x^A = \{x^i, y_i\}$, $\partial_A = \{\partial_i, \partial^i\}$, $\delta_A = \{\delta_i, \partial^i\}$, $Dx^A = \{dx^i,\ Dy_i = dy_i + L_{ik}dx^k\}$, $A, B, C, \ldots = 1, \ldots, 2n$, panagrinėkime du Kartano erdvės tenzorių rinkinius $t_{AB} = \{t_{ij}, t_{n+ij}, t_{in+j}, t_{n+i\,n+j}\}$ ir $t^{AB} = \{t^{ij}, t^{n+i\,j}, t^{i\,n+j}, t^{n+i\,n+j}\}$. Tenzorius T_{AB} ir T^{AB} apibrėžiame lygybėmis

$$
\begin{aligned}
&T_{AB}dx^A \otimes dx^B = t_{AB}Dx^A \otimes Dx^B,\\
&T^{AB}\partial_A \otimes \partial_B = t^{AB}\delta_A \otimes \delta_B.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Jei $t_{AB} = \{g_{ij}, 0, 0, g^{ij}\}$, o $t^{AB} = \{g^{ij}, 0, 0, g_{ij}\}$, tai iš (7) tapatybės gauname Kartano erdvės Sasakio metrikos metrinio tenzoriaus H komponenčių išraiškas

$$
\begin{aligned}
&H_{ij} = H^{n+i\,n+j} = g_{ij} + g^{pq}L_{ip}L_{qj}, \quad H_{n+in+j} = H^{ij} = g^{ij},\\
&H^{n+i\,j} = -H_{i\,n+j} = g^{jk}L_{ik}, \quad H^{i\,n+j} = -H_{n+i\,j} = g^{ik}L_{kj}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Panagrinėkime tokius tenzorių t_{AB} ir t^{AB} ketvertus: $t_{AB} = \{ag_{ij}, b\delta^i_j, c\delta^j_i, dg^{ij}\}$, $t^{AB} = \{lg^{ij}, m\delta^i_j, p\delta^j_i, kg_{ij}\}$. Tuomet šiems tenzoriams pagal (7) lygybes sukonstruoti tenzoriai G_{AB} ir G^{AB} apibrėžia Kartano erdvės metrikų šeimą tada ir tik tada, kai skaičiai a, b, c, d, l, m, p, k yra susieti lygybėmis

$$
c = d,\quad k = p,\quad al + cm = 1,\quad bl + dm = 0,\quad ap + ck = 0,\quad bp + dk = 1. \tag{9}
$$

Iš čia gauname tokią triparametrinę Kartano erdvės metrikų šeimą:

$$
\begin{aligned}
&G_{ij} = \alpha g_{ij} + 2\alpha\beta\gamma^{-1}L_{ij} + (\gamma + \alpha\beta^2)\gamma^{-2}g^{pq}L_{ip}L_{qj},\\
&G_{n+i\,j} = G_{j\,n+i} = -\alpha\beta\gamma^{-1}\delta^i_j - (\gamma + \alpha\beta^2)\gamma^{-2}g^{ik}L_{kj},\\
&G_{n+i\,n+j} = (\gamma + \alpha\beta^2)\gamma^{-2}g^{ij},\\
&G^{ij} = (\gamma + \alpha\beta^2)(\alpha\gamma)^{-1}g^{ij},\\
&G^{n+i\,j} = G^{j\,n+i} = \beta\delta^j_i + (\gamma + \alpha\beta^2)(\alpha\gamma)^{-1}g^{kj}L_{ik},\\
&G^{n+i\,n+j} = \gamma g_{ij} + 2\beta L_{ij} + (\gamma + \alpha\beta^2)(\alpha\gamma)^{-1}g^{pq}L_{ip}L_{qj}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Sakoma, kad tenzorių pora J ir I apibrėžia Kartano erdvės apibendrintą beveik kompleksinę struktūrą, suderintą su metrikomis G, jei šių tenzorių komponentės J^A_B ir I^A_B tenkina lygybes [1]: $J^A_C I^C_B = I^A_C J^C_B = -\delta^A_B$, $G_{AB}J^A_C I^B_D = -G_{CD}$. Remiantis (8) ir (10) tapatybėmis nesunkiai įrodoma teorema:

1 teorema. *Tenzoriai J ir I, apibrėžiami lygybėmis $J^A_B = H_{BC}G^{AC}$, $I^A_B = -H^{AC}G_{CB}$ apibrėžia apibendrintų beveik kompleksinių Kartano erdvės struktūrų, suderintų su metrikomis G, triparametrę šeimą.*

Iš šios teoremos gauname tokias tenzorių J ir I komponentes:

$$\begin{aligned}
&J^i_j = (\gamma + \alpha\beta^2)(\alpha\gamma)^{-1}\delta^i_j - \beta g^{ik}L_{kj}, \quad J^i_{n+j} = \beta g^{ij}, \\
&J^{n+i}_j = \beta g_{ij} + (\gamma + \alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2)(\alpha\gamma)^{-1}L_{ij} - \beta g^{pq}L_{ip}L_{qj}, \\
&J^{n+i}_{n+j} = \gamma\delta^j_i + \beta g^{jk}L_{ik}, \\
&I^i_j = -\alpha\delta^i_j - \alpha\beta\gamma^{-1}g^{ik}L_{kj}, \quad I^i_{n+j} = \alpha\beta\gamma^{-1}g^{ij}, \\
&I^{n+i}_j = \alpha\beta\gamma^{-1}g_{ij} + (\gamma + \alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2)\gamma^{-2}L_{ij} - \alpha\beta\gamma^{-1}g^{pq}L_{ip}L_{qj}, \\
&I^{n+i}_{n+j} = -(\gamma + \alpha\beta^2)\gamma^{-2}\delta^j_i + \alpha\beta\gamma^{-1}g^{jk}L_{ik}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Tenzorių pora P ir Q apibrėžia Kartano erdvės apibendrintą beveik sandaugos struktūrą, suderintą su metrikomis G, jei šių tenzorių komponentėms P^A_B ir Q^A_B yra teisingos lygybės $P^A_C Q^C_B = Q^A_C P^C_B = \delta^A_B$, $G_{AB}P^A_C Q^B_D = G_{CD}$.

2 teorema. *Tenzoriai P ir Q, kurių komponentės apibrėžiamos lygybėmis $P^A_B = H_{BC}G^{AC}$, $Q^A_B = H^{AC}G_{CB}$ yra Kartano erdvės apibendrintų beveik sandaugos struktūrų, suderintų su metrikomis G, triparametrės šeimos struktūrinių tenzorių komponentės.*

Jei tenzoriai P ir Q sutampa, tai gauname beveik sandaugos struktūrų vienparametrę šeimą. Šių struktūrų struktūrinių tenzorių komponentės išreiškiamos lygybėmis

$$\begin{aligned}
&P^i_j = \alpha\delta^i_j - \beta g^{ik}L_{kj}, \quad P^{n+i}_j = \beta g_{ij} + 2\alpha L_{ij} - \beta g^{pq}L_{ip}L_{qj}, \\
&P^i_{n+j} = \beta g^{ij}, \quad\quad P^{n+i}_{n+j} = -\alpha\delta^j_i + \beta g^{jk}L_{ik},
\end{aligned} \tag{12}$$

čia α – bet koks nelygus nuliui skaičius $|\alpha| \leqslant 1$, o $\beta = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$. Pastebėsime, kad apibendrintų beveik kompleksinių struktūrų atveju tenzoriai J ir I sutapti negali.

Apskaičiavę apibendrintų beveik kompleksinių ir beveik sandaugos struktūrų sukimo tenzorius, kurių komponentės N^A_{BC} apibrėžiamos lygybe

$$\begin{aligned}
N^A_{BC} = {} & P^A_D(\partial_C Q^D_B - \partial_B Q^D_C) + Q^A_D(\partial_C P^D_B - \partial_B P^D_C) \\
& + P^D_B \partial_D Q^A_C - P^D_C \partial_D Q^A_B + Q^D_B \partial_D P^A_C - Q^D_C \partial_D P^A_B,
\end{aligned} \tag{13}$$

ir pasinaudoję tenzorinių struktūrų integruojamumo kriterijumi [2], gauname, kad teisinga teorema:

3 teorema. *Kartano erdvių apibendrintos beveik kompleksinės ir beveik sandaugos struktūros yra integruojamos, kai Kartano erdvės tiesinė sietis L_{ij} yra plokščia (t.y. $R_{kij} = 0$), o Mirono afininės sieties komponentės Γ^k_{ij} sutampa su metrinės afininės sieties komponentėmis Π^k_{ij}.*

Kartano erdvės bendrąją afininę sietį Λ^C_{AB} galime apibrėžti, kaip įprasta, kovariantine išvestine

$$\nabla_{\partial_A}(\partial_B) = \Lambda^C_{AB}\partial_C. \tag{14}$$

Afininė sietis Λ^C_{AB} vadinama asocijuota su tenzorine struktūra, jei šios struktūros struktūrinių tenzorių kovariantinės išvestinės sieties Λ^C_{AB} atžvilgiu yra lygios nuliui.

4 teorema. *Afininė sietis Λ^C_{AB} yra asocijuota su Kartano erdvės apibendrintomis beveik sandaugos struktūromis, jei jos komponentėms teisingos lygybės*

$$\begin{aligned}
&\Lambda^i_{jh} + g_{jp}\partial_h g^{ip} - g_{jp}g^{ik}\Lambda^{n+k}_{n+p\ h} = 0,\\
&\Lambda^i_{j\ n+h} + 2g_{jp}C^{iph} - g_{jp}g^{ik}\Lambda^{n+k}_{n+p\ n+h} = 0,\\
&\Lambda^{n+i}_{jh} + \partial_h L^{ij} + g_{pj}\partial_h g^{kp}L_{ik} - g_{qj}g^{kp}L_{ik}A^{n+p}_{n+q\ h} + L_{kj}\Lambda^{n+i}_{n+k\ h} = 0,\\
&\Lambda^{n+i}_{j\ n+h} + \Gamma^h_{ij} + 2g_{pj}C^{hkp}L_{ik} - g_{qj}g^{kp}L_{ik}\Lambda^{n+p}_{n+q\ n+h} + L_{kj}\Lambda^{n+i}_{n+k\ n+h} = 0,\\
&\Lambda^i_{n+j\ h} = \Lambda^i_{n+j\ n+h} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Iš gautų lygybių išplaukia, kad afininė sietis Λ^C_{AB}, kurios komponentės išreiškiamos lygybėmis

$$\begin{aligned}
&\Lambda^i_{n+j\ h} = 0, \quad \Lambda^i_{n+j\ n+h} = 0, \quad \Lambda^{n+i}_{n+j\ n+h} = 0,\\
&\Lambda^{n+i}_{n+j\ h} = -\Pi^j_{ih}, \quad \Lambda^i_{jh} = -g_{jp}\partial_h g^{ip} - g_{jp}g^{ik}\Pi^p_{kh},\\
&\Lambda^i_{j\ n+h} = -2C^{ih}_j, \quad \Lambda^{n+i}_{j\ n+h} = -\Gamma^h_{ij} - 2g_{pj}C^{pkh}L_{ik},\\
&\Lambda^{n+i}_{jh} = -\partial_h L_{ij} - g_{pj}(\partial_h g^{kp}L_{ik} + g^{kq}\Pi^p_{qh}L_{ik}) + L_{kj}\Pi^k_{ih}
\end{aligned} \tag{16}$$

yra asocijuotos su Kartano erdvės apibendrintomis beveik sandaugos struktūromis sieties pavyzdys.

Literatūra

[1] F.C. Klepp, Connections compatible with special Finsler structures associated to a pair of Finsler metrics, *Mathematica*, **28**(31), 47–58 (1986).

[2] K. Yano, M. Con, *Structures on Manifolds*, World Sci. Publ. Co., Singapore (1984).

[3] E. Mazėtis, Apie Kartano erdvių vidines tenzorines struktūras, *Liet. Matem. Rink.*, **40**(2), 190–200 (2000).

Zur Theorie der allgemeine Strukturen in Kartanischen Räumen

E. Mazėtis

In dieser Arbeit ist die allgemeine Tensorstrukturen in Kartanischen Räumen konstruiert. Diese Strukturen deffiniert mit Hilfe zwei Tensoren P und Q, welche die Identität $PQ = \pm E$ erfüllt. Zusätzlich sind die affine Zussamenhänge, assozierte mit disen Strukturen, konstruiert und Bedingungen ihre Integralität aufstellt.