Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 79–82 


# Внутренние оснащения неголономной гиперповерхности с $m$-мерными образующими аффинного пространства $A_n$

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
*e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt*

Пусть аффинное пространство $A_n$ отнесено к подвижному реперу $(\vec{M}, \vec{e}_i)$, дифференциальные уравнения инфинитезимального смещения которого имеют вид $(i, j, \ldots = 1, \ldots, n)$

$$d\vec{M} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j.$$

Пусть $Gr(m, n)$ – многообразие Грассмана пространства $A_n$. Сопоставляя каждой $m$-плоскости $l_m^{\bullet} \in Gr(m, n)$ гиперплоскость $\Pi_{n-1} \in G_r(n-1, n)$, проходящую через эту $m$-плоскость $l_m$, мы получим некоторое распределение (поле), которое назовем распределением гиперплоскостей на грассмановом многообразии $Gr(m, n)$ или неголономной гиперповерхностью с $m$-мерными образующими. Пусть репер выбран так, чтобы $(p, q \ldots = 1, \ldots, m;\ \alpha, \beta, \ldots = m+1, \ldots, n-1)$

$$l_m = (M, \vec{e}_p), \quad \Pi_{n-1} = (l_m, \vec{e}_\alpha).$$

Тогда в частично канонизированном репере рассматриваемое распределение определится следующими дифференциальными уравнениями

$$\omega_\alpha^n = \lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta + \lambda_\alpha \omega^n + \mu_{\alpha\beta}^p \omega_p^\beta + \mu_\alpha^p \omega_p^n \tag{1}$$

и соответствующими внешними квадратичными уравнениями.

Пусть

$$a_{\alpha\beta} = \lambda_{(\alpha\beta)}, \quad r_{\alpha\beta} = \lambda_{[\alpha\beta]}.$$

Определитель

$$\lambda_0 = \det ||\lambda_{\alpha\beta}||$$

является относительным инвариантом, так как $(a, b, \ldots = m+1, \ldots, n)$

$$d\ln|\lambda_0| - 2\omega_\alpha^\alpha + (n-m-1)\omega_n^n = b_a\omega^a + b_a^p\omega_p^a.$$

Предпологая, что $\lambda_0 \neq 0$, введем систему величин $\overset{*}{\lambda}{}^{\alpha\beta}$, для которой

$$\overset{*}{\lambda}{}^{\alpha\gamma}\lambda_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad \lambda_{\alpha\gamma}\overset{*}{\lambda}{}^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta.$$

Распределение гиперплоскостей (1) будем называть оснащенным (или нормализованным) в смысле Нордена–Гринцевичюса, если к каждой $m$-плоскости $l_m$ этого распределения присоединены два подпространства

$$\Pi_I\colon\ x^\alpha = L^\alpha x^n$$

(нормальное пространство первого рода) и

$$\Pi_{II}\colon\ L_\alpha x^\alpha = 1, \quad x^p = L_\alpha^p x^\alpha, \quad x^n = 0$$

(нормальное пространство второго рода) аффинного пространства $A_n$.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Уравнения*

$$\begin{aligned} \varrho_\alpha &= -\left(\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha\beta}L^\beta\right), \\ \varrho_\alpha^p &= -\left(\mu_\alpha^p + \mu_{\alpha\beta}^p L^\beta\right) \end{aligned} \tag{2}$$

*устанавливают соответствие между нормальными пространствами* $\Pi_I$ *и* $\Pi_{II}$. *Величины* $\varrho_\alpha$ *и* $\varrho_\alpha^p$ *определяют нормальное пространство* $\Pi_{II}$.

Система величин

$$\lambda^\alpha = -\overset{*}{\lambda}{}^{\alpha\beta}\lambda_\beta$$

определяет внутреннее нормальное пространство первого рода.

Определитель

$$a_0 = \det||a_{\alpha\beta}||$$

является относительным инвариантом, поскольку

$$d\ln|a_0| - 2\omega_\alpha^\alpha + (n-m-1)\omega_n^n = a_a\omega^a + a_a^p\omega_p^a.$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** *Каждая из систем величин*

$$B^{\alpha} = -\frac{1}{n-m+1}\overset{*}{\lambda}{}^{\beta\alpha} b_{\beta},$$

$$a^{\alpha} = -\frac{1}{n-m+1}\overset{*}{\lambda}{}^{\beta\alpha} a_{\beta}$$

*определяет внутреннее нормальное пространство первого рода.*

При $a_0 \neq 0$ построим тензор $\overset{*}{a}{}^{\alpha\beta}$, который связан с тензором $a_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$a_{\alpha\gamma}\overset{*}{a}{}^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \quad \overset{*}{a}{}^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Из дифференциальных уравнений

$$\nabla\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}\omega^{n}_{n} = \lambda_{\alpha\beta a}\omega^{a} + \lambda^{p}_{\alpha\beta a}\omega^{a}_{p}$$

следует, что

$$\nabla\lambda_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega^{n}_{n} - (\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\varepsilon\gamma} + \lambda_{\alpha\gamma}\lambda_{\varepsilon\beta} + \lambda_{\beta\gamma}\lambda_{\alpha\varepsilon})\omega^{\varepsilon}_{n} = \lambda_{\alpha\beta\gamma a}\omega^{a} + \lambda^{p}_{\alpha\beta\gamma a}\omega^{a}_{p}.$$

Свертка

$$\gamma_{\alpha} = \frac{1}{2}\overset{*}{a}{}^{\gamma\beta}(\lambda_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_{\alpha\gamma\beta} + \lambda_{\beta\alpha\gamma} + \lambda_{\gamma\alpha\beta} - \lambda_{\beta\gamma\alpha} - \lambda_{\gamma\beta\alpha})$$

удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\nabla\gamma_{\alpha} - (n-m+1)\lambda_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{n} = \gamma_{\alpha a}\omega^{a} + \gamma^{p}_{\alpha a}\omega^{a}_{p}.$$

При помощи величин $a_{\alpha}$ и $\gamma_{\alpha}$ построим величины

$$\beta_{\alpha} = \frac{1}{2}(a_{\alpha} + \gamma_{\alpha}).$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** *Геометрические объекты*

$$\beta^{\alpha} = -\frac{1}{n-m+1}\overset{*}{a}{}^{\alpha\beta}\beta_{\beta},$$

$$\gamma^{\alpha} = -\frac{1}{n-m+1}\overset{*}{\lambda}{}^{\alpha\beta}\gamma_{\beta}$$

*определяют внутренние нормальные пространства первого рода.*

Внутреннему нормальному пространству первого рода

$$M^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\lambda^{\alpha} + \gamma^{\alpha}\right)$$

в соответствии (2) соответствует нормальное пространство второго рода, определенное геометрическим объектом $\{m_{\alpha}, m_{\alpha}^{p}\}$:

$$m_{\alpha} = -\frac{1}{2}\left(\lambda_{\alpha} - \frac{\gamma_{\alpha}}{n-m+1}\right),$$
$$m_{\alpha}^{p} = -\frac{1}{2}\left(\mu_{\alpha}^{p} - \overline{C}_{\alpha}^{p} + \mu_{\alpha\beta}^{p}\gamma^{\beta}\right),$$

где

$$\overline{C}_{\alpha}^{p} = -\left(\mu_{\alpha\beta}^{p}\lambda^{\beta} + \mu_{\alpha}^{p}\right).$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** *Геометрический обьект*

$$S^{\alpha} = \beta^{\alpha} + \overset{*}{a}{}^{\beta\alpha} m_{\beta}$$

*определяет внутреннее нормальное пространство первого рода.*

## Intrinsic normalizations of a nonholonomic hypersurface with $m$-dimensional generators in affine space $A_n$

K. Navickis

In this article intrinsic normalizations of a nonholonomic hypersurface with $m$-dimensional generators in affine space $A_n$ is constructed in an invariant form.