Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 365–368

Dešimtainės pozicinės sistemos ir trupmenų mokymas penktoje klasėje

Albertas BAKŠTYS (ŠU), Irena ŠUKIENĖ (Šiaulių S. Daukanto vid. m-la),
Albina VILIMIENĖ (Vilniaus Tuskulėnų vid. m-la)
el. paštas: albertas@fm.su.lt, s.daukanto.vm@osf.su.lt

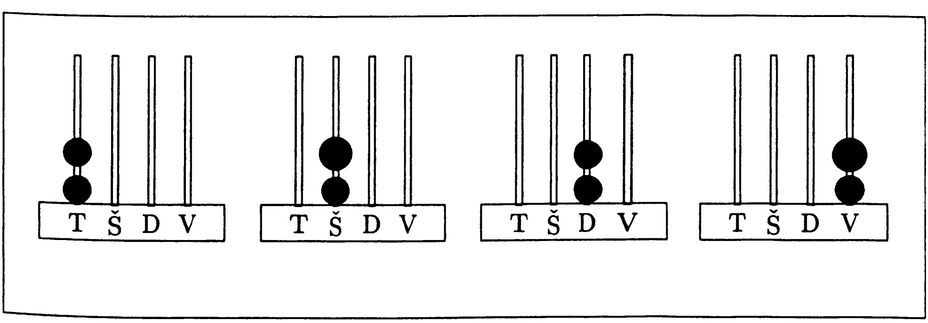
Pirmoji pozicinė skaičiavimo sistema atsirado Babilone apie 2000 metus pr. Kr. Joje buvo naudojami tik du skaitmenys – vienetas ir dešimt, nors sistema buvo šešiasdešimtainė. Iš jų buvo sudaromi skaitmenys nuo 1 iki 59. Ši pozicinė sistema nėra absoliutinė, nes joje nebuvo skaičiaus 0. Indai 500 metų po Kr. sukūrė absoliutinę dešimtainę pozicinę sistemą. Į Europą ši sistema atkeliavo per arabų šalis. Arabų matematiko Chorezmi (780–850) traktatas "Apie indiškuosius skaičius" XII amžiuje buvo išverstas į lotynų kalbą ir pasklido Europoje.

Dešimtainių trupmenų naudojimas Vakarų Europoje siejamas su 1585 metais Simono Stevino (1548–1620) išleista 7 puslapių knygute "Dešimtoji". Joje nagrinėjama, kaip dešimtainėje pozicinėje sistemoje užrašyti trupmeninius skaičius ir su jais atlikti aritmetinius veiksmus. Kinai ir arabai dešimtaines trupmenas naudojo jau kelis šimtmečius anksčiau.

Vadinasi, nuo pirmosios pozicinės skaičiavimo sistemos atsiradimo iki absoliutinės pozicinės dešimtainės sistemos naudojimo Europoje praėjo 3500 metų. Tai yra ženklas, kad ši sistema nėra tokia paprasta, kaip atrodo, kai išmoksti atlikti aritmetinius veiksmus.

Pradėti mokyti dešimtainės pozicinės sistemos patogu naudojant abaką (1 pav).

Mokiniai nesunkiai supranta, kad tas pats rutuliukas kaskart reiškia vis kitą skaičių. Po to siūlome mokiniams patiems pavaizduoti skaičius 3, 30, 300, 32, 23 ir pan. Atkreipiame dėmesį į tai, kad šitoks skaičių rašymo būdas yra ne tik pozicinis, bet ir dešimtainis. Tam panaudojame skaičių 333, paklausdami, ką reiškia kiekvienas trejetas.



1 pav. Abakas.

Mokiniai geriau suvokia dešimtainę pozicinę sistemą, kai parodome, kad tą patį skaičių galime užrašyti kitoje sistemoje, pavyzdžiui, dvejetainėje.

Po kelių pamokų prie pozicinės sistemos sąvokos grįžtame nagrinėdami romėnų skaitmenis. Parodome, kad vieneto skaitmuo I reiškia tą patį nepriklausomai nuo jo vietos skaičiuje, pavyzdžiui, IV, XI, XXIII, tik vienur vienetas atimamas, o kitur pridedamas.

Kai mokiniai gerai supranta natūraliųjų skaičių užrašymą dešimtainėje pozicinėje sistemoje, nesunku pereiti prie dešimtainės trupmenos sąvokos.

Nors dešimtainės trupmenos Europoje naudojamos daugiau kaip 400 metų, mokymui skirtoje literatūroje trupmenos nevienodai skirstomos į paprastąsias ir dešimtaines. Pasak vienų, paprastoji trupmena vadinama dešimtaine, kai jos vardiklis yra 10 natūralusis laipsnis: $\frac{3}{10}, \frac{49}{100}, \frac{153}{1000}, \ldots$ [1, 2, 3]. Šitas suskirstymas nesiremia dešimtaine pozicine sistema. Be to, šitokių paprastųjų trupmenų nebereikėtų versti dešimtainėmis, nes jos tokios jau yra.

Trupmenos į paprastąsias ir dešimtaines turi būti skirstomos pagal skaičių užrašymo dešimtainėje pozicinėje sistemoje būdą [4, 5, 6].

Natūralųjį skaičių $n = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ (čia $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – skaitmenys) dešimtainėje pozicinėje skaičiavimo sistemoje suprantame kaip sumą:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0.$$

Kai tokiame reiškinyje yra narių su neigiamais 10 laipsnio rodikliais, gauname trupmeninį skaičių:

$$x = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots.$$

Susitarta 10 laipsnių nerašyti, o sveikąją dalį nuo trupmeninės atskirti kableliu:

$$x = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots.$$

Taip užrašyta trupmena vadinama dešimtaine.

Skaitmenys $b_1, b_2, b_3, \ldots$ vadinami dešimtainiais ženklais.

Fundamentaliame Hardžio ir Raito veikale [6] yra skyrius apie skaičiaus išreiškimą dešimtaine trupmena. Ten rašoma, kad dešimtainė trupmena $0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$ yra sutrumpintas eilutės

$$a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + a_n \cdot 10^{-n} + a_{n+1} \cdot 10^{-n-1} + \cdots$$

užrašas. Jeigu $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$, dešimtainė trupmena vadinama baigtine.

Vadinasi, $\frac{35}{100}$ nėra dešimtainė trupmena. Ji tampa dešimtaine trupmena tik tada, kai ją užrašysime šitaip:

$$\frac{35}{100} = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} = 0{,}35.$$

Taigi, trupmena yra:

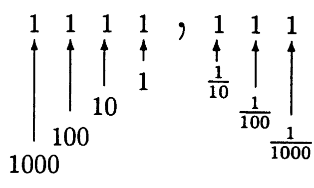
paprastoji	dešimtainė	
	užrašome	suprantame
$\frac{3}{10}$	0,3	$\frac{3}{10}$
$\frac{49}{100}$	0,49	$\frac{4}{10}+\frac{9}{100}$
$3\frac{125}{1000}$	3,125	$3+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$
$\frac{1}{3}$	0,333...	$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$

Kaip mokiniams paaiškinti dešimtainės trupmenos sąvoką ir ją plėtoti? A. Bakščio ir G. Bakščio penktos klasės matematikos vadovėlyje [5] tai pradedama gerokai anksčiau. Nagrinėdami matavimo vienetus, parodome, kad 1 dm 2 cm 7 mm ilgį galime išreikšti decimetrais:

$$1 \text{ dm } 2 \text{ cm } 7 \text{ mm} = 1 \text{ dm } \frac{2}{10} \text{ dm } \frac{7}{100} \text{ dm},$$

o tai galime užrašyti trumpiau – 1,27 dm. Su kableliu mokome užrašyti prekės kainą ir masę. Ir atvirkščiai, parodome, kaip prekės kainą, atkarpos ilgį ar masę, užrašytus su kableliu, parašyti be kablelio. Taip konkrečiais daiktais supažindiname mokinius su dešimtainės trupmenos sąvoka, paties termino dar neminėdami.

Pradėdami dešimtainių trupmenų skyrių, pratęsiame pozicinę sistemą į dešinę:



Po to nagrinėjame paprastųjų trupmenų, kurių vardiklis yra 10, 100, 1000, ... vertimą dešimtainėmis trupmenomis:

$$3\frac{4}{10} = 3 + \frac{4}{10} = 3{,}4;$$
$$6\frac{12}{100} = 6 + \frac{10}{100} + \frac{2}{100} = 6 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = 6{,}12;$$
$$5\frac{8}{100} = 5 + \frac{8}{100} = 5{,}08.$$

Ir atvirkščiai, dešimtainę trupmeną užrašėme paprastųjų trupmenų suma, kaip antai:

$$4{,}15 = 4 + \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = 4 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100}.$$

Čia mokiniai turėjo pagalvoti, kaip trupmeną $\frac{10}{100}$ užrašyti stambesnėmis dalimis.

Apklausa parodė, kad mokiniai šitokią dešimtainės trupmenos sąvoką suprato gerai.

Su kai kuriomis paprastosiomis trupmenomis mokiniai susipažįsta jau pradinėje mokykloje. Penktoje klasėje jas apibrėžiame kaip vieną ar kelias lygias vieneto dalis. Todėl atsisakome nuo torto, obuolių ar kitų konkrečių daiktų dalijimo, nes nėra būdo juos padalyti į lygias dalis. Grafiškai trupmenas vaizduojame atkarpomis, plotais ir kurios nors aibės poaibiais, žinoma, nevartodami aibės terminų.

Penktoje klasėje ruošiame mokinius suprasti pagrindinę trupmenos savybę. Tam naudojame mokiniams pagal savo prasmę ir skambesį lengvai suprantamas sąvokas "dalių smulkinimas ir stambinimas". Tai taikome sudėdami ar atimdami trupmenas, kai vienos trupmenos vardiklis yra kitos trupmenos vardiklio kartotinis. Beje, ir vyresniųjų klasių mokiniai nesusimąsto, kas iš tiesų atsitinka su trupmena, kai jai pritaikome pagrindinę savybę.

Literatūra

[1] А.М. Микиша, В.Б. Орлов, Толковый математический словарь, Москва, "Русский язык", (1989).

[2] О.В. Мантуров и др. Толковый *словарь математических терминов*, Пособие для учителей, Под ред. проф. В.А. Диткина, Москва, Просвещение (1965).

[3] N. Cibulskaitė, M. Stričkienė. *Matematika ir pasaulis*, Vilnius, TEV (1996).

[4] А.Г. Цыпкин, Справочник математики для средней *школы*, Под ред. С.А. Степанова, Москва, Наука (1979).

[5] A. Bakštys, G. Bakštys. *Matematika*, 5 klasė, Vilnius, Alma littera (2001).

[6] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Clarendon Press (1968).

Teaching of decimal positional number system and decimal fractions in the 5-th grade

A. Bakštys, I. Šukienė, A. Vilimienė

Long, almost 3500 years delay was observed, until the notion of positional number system originating from Babylon was introduced in Western Europe and, afterwards, in all over the modern world. This proves that acquaintance with such a complex concept as decimal fraction is must be started long before the arithmetic of decimal fractions is introduced. Teachers working experience using A. Bakštys and G. Bakštys textbook [5] in the 5-th grade is described in this paper.