Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 438–443

Matematikos pažymių koreliacinė analizė ir sesijos rezultatų prognozė

Juozas RAULYNAITIS, Aleksandras KRYLOVAS (VGTU)
el. paštas: akr@fm.vtu.lt

Įvadas

Šiame straipsnyje nagrinėjama įstojusių į Vilniaus Gedimino technikos universiteto (VGTU) Statybos fakulteto pirmo kurso studentų mokyklinės matematikos žinių įtaka I sesijos matematikos egzamino rezultatams. Konkursinio balo skaičiavimo taisyklės, mokyklų profiliavimas, skirtingi mokinių mokymosi lygiai bei kitos priežastys įtakoja labai įvairią įstojusių į universitetą mokyklinių žinių kokybę. Mes bandome įvairiais būdais įvertinti minimalų mokyklinės matematikos žinių lygį, kuris su pakankamai didele tikimybe užtikrina sėkmingą aukštosios matematikos studijavimą. Tam tikslui buvo testuojamos mokyklinės matematikos žinios, analizuojami valstybinio ir mokyklinio matematikos egzamino rezultatai, brandos atestato metiniai pažymiai bei I sesijos egzamino rezultatai.

Taigi turint įstojusių matematikos metinius pažymius, brandos egzaminų pažymius, testo rezultatus bei I sesijos matematikos egzamino pažymius, analizuotas jų koreliacinis priklausomumas.

2001 metų priėmimas į VGTU ir dar į šešias Lietuvos aukštąsias mokyklas buvo vykdomas pagal konkursinį balą, kurio dalį sudarė ir matematikos metinis bei brandos egzamino įvertinimai. Stojant į inžinerines studijų programas, konkursinį balą be matematikos pažymių dar sudarė lietuvių kalbos egzamino, fizikos metinis bei egzamino pažymiai, užsienio kalbos metinio ir egzamino pažymių vidurkis. Valstybinis matematikos brandos egzamino šimtabalės sistemos pažymys buvo dalijamas iš 10 ir prie dalmens buvo pridedama 10 balų. Turintiems atestate pažymius A lygiu prie pažymio buvo pridedamas 1 balas, o S lygiu – prie metinio pažymio pridedami 2 balai, prie egzamino pažymio pridedamas 1 balas.

1. Pažymių koreliacinė analizė

1.1. *Matematikos metinių B lygio pažymių ir matematikos mokyklinio brandos egzamino pažymių koreliacinė analizė*

Turint imtį, kurios didumas $n = 51$, apskaičiuotos tokios skaitinės charakteristikos:

– matematikos metinių B lygio pažymių vidurkis $\overline{x} = 6,73$;
– brandos egzamino pažymių vidurkis $\overline{y} = 7,45$;
– koreliacijos koeficientas

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{s_x \cdot s_y} = 0,68.$$

Iš visų toliau nagrinėjamų atsitiktinių dydžių porų šis r yra pats didžiausias. Taigi matematikos metiniai B lygio pažymiai ir mokyklinio brandos egzamino pažymiai yra geriausiai suderinti.

Regresijos tiesės lygtis: $\overline{y}_x = 0,68x + 2,89$.

Apskaičiuoti brandos egzamino pažymių sąlyginiai vidurkiai ir koreliacinis santykis

$$\eta^*_{yx} = \frac{\sqrt{\overline{y}^2_x - \overline{y}^2}}{s_y} = 0,72.$$

Kadangi šis santykis nedaug skiriasi nuo koreliacijos koeficiento r, jokia regresijos kreivė ieškoma nebuvo.

Apskaičiuoti Spirmeno ir Kendalo ranginiai koreliacijos koeficientai r_S ir r_K:

$$r_S = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0,71;$$

$$r_K = \frac{4}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} R_i - 1 = 0,69.$$

Čia x_i, y_i ir R_i – metinių pažymių ir brandos egzamino pažymių rangai, gaunami pažymius išdėstant mažėjimo tvarka.

Pagal apskaičiuotus Spirmeno ir Kendalo ranginius koreliacijos koeficientus $r_S = 0,71$ ir $r_K = 0,69$ darome išvadą, kad matematikos metiniai B lygio pažymiai ir matematikos mokyklinio brandos egzamino pažymiai yra pakankamai gerai suderinti.

Tikrinant nulinę hipotezę, kad minimi pažymiai yra nesuderinti, t.y., kad teorinis Spirmeno ranginis koreliacijos koeficientas $\rho_S = 0$, apskaičiuojama Stjūdento kriterijaus $T = r_S \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_S^2}}$ reikšmė $T_{sk.} = 6,980$. Parinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$ ir alternatyviąją hipotezę $H_a : \rho_S \neq 0$, gaunama Stjūdento skirstinio dvipusė kritinė sritis

$$(-\infty; -t_{\frac{\alpha}{2};n-2}] \cup [t_{\frac{\alpha}{2};n-2}; +\infty) = (-\infty; -2,010] \cup [2,010; +\infty).$$

Pastebime, kad apskaičiuotoji Stjūdento kriterijaus reikšmė $T_{sk.} = 6,980$ patenka į kritinę sritį, todėl nulinė hipotezė atmetama ir priimama alternatyvioji.

Tikrinant nulinę hipotezę, kad teorinis Kendalo ranginis koreliacijos koeficientas $\rho_K = 0$, apskaičiuojama asimptotiškai normuoto kriterijaus $U = r_K \cdot \sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}}$ reikšmė

$U_{sk.} = 7,107$. Parinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$ ir alternatyviąją hipotezę $H_a : \rho_K \neq 0$, gaunama normuotojo skirstinio dvipusė kritinė sritis

$$(-\infty; -u_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [u_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty) = (-\infty; -1,960] \cup [1,960; +\infty).$$

Pastebime, kad apskaičiuotoji kriterijaus reikšmė patenka į kritinę sritį, todėl ir šiuo atveju nulinė hipotezė atmetama ir priimama alternatyvioji.

Taigi ranginis koreliacinis ryšys tarp matematikos metinių B lygio pažymių ir matematikos mokyklinio brandos egzamino pažymių yra reikšmingas.

1.2. *Matematikos metinių A lygio pažymių ir matematikos mokyklinio brandos egzamino pažymių koreliacinė analizė*

Imties didumas $n = 44$. Gauti tokie rezultatai:

- matematikos metinių A lygio pažymių vidurkis $\overline{x} = 6,73$;
- brandos egzamino pažymių vidurkis $\overline{y} = 7,91$;
- koreliacijos koeficientas $r = 0,61$.

Pastebime, kad mokyklinio brandos egzamino vidurkis, kai buvo mokytasi A lygiu, $0,45$ balo didesnis už tą, kai buvo mokytasi B lygiu. Todėl, atrodytų, pateisinama, kad 2001 metais stojant į aukštąją mokyklą, turintiems brandos atestate pažymius A lygiu, prie pažymio buvo pridedamas 1 balas. Tačiau pagal mūsų turimus duomenis, apskaičiavus Stjūdento kriterijaus reikšmę $(-1,293)$ ir parinkus reikšmingumo lygmenį $0,1$, nulinę hipotezę atmetame (balo pridėjimas pateisinamas), o parinkus reikšmingumo lygmeni $0,05$, H_0 atmesti nėra pagrindo (balo pridėjimas nepateisinamas).

1.3. *Matematikos metinių A arba S lygio pažymių ir matematikos valstybinio egzamino šimtabale sistema įvertinimų koreliacinė analizė*

Turint imtis, 1 lentelėje apskaičiuotos jų skaitinės charakteristikos.

Tiriant pažymių ranginį suderintumą gauta Stjūdento ir normuotojo atsitiktinio dydžio reikšmės, patenkančios į atitinkamas kritines sritis. Todėl ir šiuo atveju negalima teigti, kad matematikos metiniai A arba S lygio pažymiai ir valstybinio egzamino pažymiai yra visai nesuderinti. Tačiau nedidelės koreliacijos koeficientų reikšmės neatspindi gero suderinamumo.

1 lentelė
Pažymių vidurkiai ir koreliacijos koeficientai

Metinių pažymių lygis	Imties didumas	Metinių pažymių vidurkis	Valstybinio brandos egzamino pažymių vidurkis	Koreliacijos koeficientas
A	120	7,73	41,22	0,37
S	48	7,54	49,04	0,39

1.4. *Pirmosios egzaminų sesijos I laikymo matematikos pažymių (atsitiktinis dydis X) ir valstybinio matematikos egzamino pažymių (atsitiktinis dydis Y) koreliacinė analizė*

Turimos imties didumas $n = 67$ ir gauti tokie rezultatai:
- pirmosios egzaminų sesijos matematikos pažymių vidurkis $\overline{x} = 7,15$;
- valstybinio egzamino įvertinimų vidurkis $\overline{y} = 45,54$;
- koreliacijos koeficientas $r = 0,37$.

1.5. *Pirmosios egzaminų sesijos I laikymo matematikos pažymių ir mokyklinio matematikos egzamino pažymių, neišskiriant lygių, koreliacinė analizė*

Turimos imties didumas $n = 37$. Apskaičiuota:
- pirmosios egzaminų sesijos matematikos pažymių vidurkis $\overline{x} = 5,22$;
- mokyklinio egzamino pažymių vidurkis $\overline{y} = 7,65$;
- koreliacijos koeficientas $r = 0,42$.

1.6. *Pirmosios egzaminų sesijos I laikymo matematikos pažymių (atsitiktinis dydis X) ir brandos atestato matematikos metinių pažymių (atsitiktinis dydis Y) koreliacinė analizė*

Turimos imties didumas $n = 104$.

Kai metiniuose pažymiuose neišskiriami mokymosi lygiai, gauti tokie rezultatai:
- pirmosios egzaminų sesijos matematikos pažymių vidurkis $\overline{x} = 6,46$;
- metinių pažymių vidurkis $\overline{y} = 7,34$;
- koreliacijos koeficientas $r = 0,51$.

Kai prie metinių A lygio pažymių pridėtas 1 balas, o prie metinių S lygio pažymių pridėti du balai, gauti tokie rezultatai:
- metinių pažymių vidurkis $\overline{y} = 8,29$;
- koreliacijos koeficientas $r = 0,58$.

2. Sesijos rezultatų prognozė

2.1. *Prognozė pagal brandos atestato matematikos metinį pažymį*

Turima koreliacinė lentelė (S – I sesijos pažymys, M – metinis pažymys) (2 lentelė).

Iš 2 lentelės galėtume rasti įvairius santykinius dažnius, pavyzdžiui, tokio įvykio dažnį: I egzaminų sesijos pakankamas pažymys (10, 9, 8, 7), kai metinis pažymys yra 10, 9, 8. Taigi $\omega(S > 6|M > 7) = \frac{38}{52} = 0,73$.

Analogiškai,

$$\omega(S > 6|5 \leqslant M \leqslant 7) = 0,38; \quad \omega(S > 6|M = 4) = 0,20.$$

2 lentelė
Rezultatų statistika

	M		
S	10, 9, 8	7, 6, 5	4
10, 9, 8, 7	38	18	1
6, 5	12	18	2
4, 3, 2,1	2	11	2
k_j	52	47	5

Šiuos dažnius galima laikyti sąlyginių tikimybių įverčiais. Pagal juos, žinant metinį pažymį, galima prognozuoti sesijos egzamino įvertinimą. Taigi blogo sesijos rezultato prognozė:

$$\omega(S < 5|M = 4) = 0,40;$$
$$\omega(S < 5|5 \leqslant M \leqslant 7) = 0,24;$$
$$\omega(S < 5|M > 7) = 0,04.$$

Patenkinamo (silpno) sesijos rezultato prognozė:

$$\omega(5 \leqslant S \leqslant 6|M = 4) = 0,40;$$
$$\omega(5 \leqslant S \leqslant 6|5 \leqslant M \leqslant 7) = 0,38;$$
$$\omega(5 \leqslant S \leqslant 6|M > 7) = 0,23.$$

2.2. *Prognozė pagal mokyklinės matematikos testo įvertinimą*

2000 m. rugsėjo mėnesį VGTU Statybos fakulteto keturių akademinių grupių studentams buvo duotas mokyklinės matematikos testas. Darbe [3] yra pateiktas vienas šio testo variantas ir ištirta jo rezultatų koreliacija su valstybinio brandos egzamino bei atestato matematikos metiniais pažymiais. Šio testo rezultatų palyginimas su pirmosios sesijos matematikos egzamino pažymiais leidžia įvertinti tikimybes sėkmingai bei nesėkmingai išlaikyti egzaminą, t.y., padaryti sesijos rezultatų prognozę.

Pagal apibendrintą (žr. [3]) testo rezultatą (T), perskaičiuotą į dešimtbalę skalę, studentai skirstomi į keturias grupes: *nepakankamų* mokyklinės matematikos žinių ($T < 3$), *silpnų* žinių ($T = 3, 4$), *vidutinių* žinių ($T = 5, 6, 7$) ir *pakankamų* žinių ($T > 7$).

Pagal I sesijos matematikos egzamino pažymius studentai suskirstomi į tris grupes: *blogo* sesijos rezultato ($S < 5$), *silpno* rezultato ($S = 5, 6$) ir *pakankamo* rezultato ($S > 6$).

3 lentelėje surašyti sąlyginių tikimybių $P(S|T)$ įverčiai. Iš jos matome, kad esant silpnoms mokyklinėms žinioms, tikimybė neišlaikyti I sesijos egzamino įvertinama $0,75$, o esant pakankamoms žinioms – tik $0,24$.

3 lentelė
Prognozuojamų rezultatų tikimybės

$P(S < 5 \mid T < 3) = 0,75$;	$P(S < 5 \mid 3 \leqslant T \leqslant 4) = 0,52$;
$P(S < 5 \mid 5 \leqslant T \leqslant 7) = 0,46$;	$P(S < 5 \mid T > 7) = 0,24$;
$P(5 \leqslant S \leqslant 6 \mid T < 3) = 0,20$;	$P(5 \leqslant S \leqslant 6 \mid 3 \leqslant T \leqslant 4) = 0,37$;
$P(5 \leqslant S \leqslant 6 \mid 5 \leqslant T \leqslant 7) = 0,30$;	$P(5 \leqslant S \leqslant 6 \mid T > 7) = 0,36$;
$P(S > 6 \mid T < 3) = 0,05$;	$P(S > 6 \mid 3 \leqslant T \leqslant 4) = 0,11$;
$P(S > 6 \mid 5 \leqslant T \leqslant 7) = 0,24$;	$P(S > 6 \mid T > 7) = 0,40$.

3. Išvados

1. Nemaža dalis pirmakursių neturi pakankamų mokyklinės matematikos žinių aukštajai matematikai studijuoti. Todėl VGTU Matematinio modeliavimo katedroje galvojama apie išlyginamųjų matematikos kursų rengimą priimtiems studijuoti.

2. Geriausiai yra suderinti matematikos metiniai B lygio pažymiai ir mokyklinio brandos egzamino pažymiai (koreliacijos koeficientas $r = 0,68$, kai imties didumas $n = 51$). Pakankamai gerai suderinti matematikos metiniai A lygio pažymiai ir mokyklinio brandos egzamino pažymiai. Jų koreliacijos koeficientas $r = 0,61$, kai imties didumas $n = 44$.

3. Negalima teigti, kad matematikos metiniai A lygio pažymiai ir valstybinio egzamino pažymiai yra visai nesuderinti. Tačiau nedidelė koreliacijos koeficiento reikšmė $r = 0,37$ neturėtų būti toleruojama. Koreliacijos koeficientai, mokantis A lygiu ir S lygiu, yra beveik lygūs: $0,37$ ir $0,39$.

4. Pirmosios egzaminų sesijos I laikymo matematikos pažymių, iš vienos pusės, ir valstybinio matematikos egzamino pažymių, mokyklinio egzamino pažymių, brandos atestato matematikos metinių pažymių, neišskiriant lygių, iš kitos pusės, koreliacijos koeficientai atitinkamai lygūs: $r = 0,37$; $r = 0,42$; $r = 0,51$. Kai prie metinių A lygio pažymių pridėtas 1 balas, o prie metinių S lygio pažymių pridėti du balai, gautas koreliacijos koeficientas $r = 0,58$.

Literatūra

[1] J. Kruopis, *Matematinė statistika*, Mokslas, Vilnius (1993).
[2] A. Krylovas, Studentų mokyklinės matematikos žinių vertinimas, *LMD konf. darbai*, 146–149 (1997).
[3] A. Krylovas, R. Vilkelis, Pirmo kurso studentų mokyklinės matematikos žinios, *Lietuvos mokslas ir pramonė, Matematika ir Matematikos Dėstymas – 2001*, Konferencijos pranešimų medžiaga, Kaunas, pp. 30–34.

Correlation analysis of marks for mathematics and prognosis of results of examinations

J. Raulynaitis, A. Krylovas

In this article a correlational analysis of different marks for mathematicas of those who whe admitted to the Faculty of Construction of the Vilnius Gediminas Technical University in 2001 is carried out.