Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 444–450

Matematinio modeliavimo mokymo klausimu

Eimutis VALAKEVIČIUS (KTU)
el. paštas: eimval@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Peržvelgus universitetų matematikos programas, daugelyje programų neteko matyti matematinio modeliavimo kurso. Teko bendrauti su kai kuriais darbdaviais, kurie skundėsi, kad absolventai, baigę universitetus, nemoka kurti ir analizuoti matematinių modelių bei interpretuoti gautų rezultatų. Šiame straipsnyje nagrinėjama matematinio modeliavimo kurso svarba bei mokymo metodologiniai aspektai, matematinių modelių kūrimo procesas, sunkumai įsisavinant šią discipliną, remiantis patyrimu dėstant kursą „Sistemų matematiniai modeliai" KTU taikomosios matematikos specialybės studentams septintajame semestre. Yra laikoma, kad matematinis modeliavimas yra taikomosios matematikos širdis. Tačiau šis kursas yra būtinas ne tik taikomosios matematikos, bet ir kitų specialybių studentams. Pastaruoju metu matematiniai metodai ir modeliavimas taikomi ne tik inžinierinėse srityse, bet ir ekologiniuose, biologiniuose, socialiniuose ir netgi humanitariniuose moksluose. Kadangi matematikos taikymų sritis yra labai plati, tai bus pateikta tik bendra matematinių modelių klasifikacija bei jų sudarymo technika. Nors matematinis modeliavimas per amžius buvo sėkmingai naudojamas beveik visų mokslininkų ir inžinierių, tačiau kaip atskira disciplina buvo pradėta mokyti ir plėtoti tik per paskutiniuosius penkis dešimtmečius. Tai akivaizdžiai iliustruoja periodiškai rengiamos tarptautinės konferencijos [1, 11] matematinio modeliavimo mokymo klausimais bei daugybė leidžiamų žurnalų šia tema. Taip pat yra išleista nemažai puikių vadovėlių apie matematinį modeliavimą [2, 3, 4, 5, 6].

2. Matematinio modeliavimo kurso tikslai ir uždaviniai

Universitetuose pirmaisiais metais dėstomas klasikinis matematikos kursas yra paprastai pateikiamas pakankamai formaliai, be realaus pasaulio uždavinių pavyzdžių. To priežastis dažniausiai yra labai suspaustas kursas, kai per trumpą laiką reikia pateikti labai daug medžiagos. Todėl daugelis studentų sunkiai įsisavina matematinius metodus. Nustatyta, kad geriausiai matematikos kursas įsisavinamas, pateikiant kasdieninio gyvenimo pavyzdžius, t.y. per taikymus. Todėl reikia dėstyti matematinio modeliavimo kursą visų fakultetų studentams, kurio turinys priklausytų nuo specialybės. Čia bus pateikti tik bendrieji modeliavimo principai.

Pradedant dėstyti matematinio modeliavimo kursą, paprastai pirmiausiai paaiškinama matematinio modeliavimo svarba įvairioms mokslo ir gyvenimo sritims. Reikia akcentuoti, kad matematinio modeliavimo uždaviniai paprastai kyla iš realaus gyvenimo ir stengtis parodyti, kad „sausa“ matematika gali būti labai sėkmingai panaudota priimant svarbius sprendimus realiame gyvenime, o tuo pačiu sudominti studentus matematika.

Matematinio modeliavimo kurso tikslas yra suformuoti įvairių uždavinių sprendimo įgūdžius, t.y. kurti, įvertinti ir kritikuoti realaus gyvenimo matematinius modelius.

Mokymosi išdavoje studentai turėtų įgyti tokias žinias:

1. Suvokti uždavinio sprendimo metodologiją.
2. Suprasti skirtumą tarp modelio ir modeliavimo.
3. Žinoti kaip ir kada gali būti taikomi matematiniai metodai.

Išklausę kursą studentai turi sugebėti:

1. Kurti ir analizuoti matematinius modelius.
2. Kurti kompiuterines programas ir taikyti specializuotus programinius paketus.
3. Pateikti modeliavimo rezultatus bei išvadas aiškiai ir tiksliai.

Modulis parastai realizuojamas skaitant paskaitas ir sprendžiant praktinius uždavinius bei atliekant laboratorinius darbus su kompiuteriais arba išduodant kursinį darbą, kuris apima matematinio modelio sudarymą bei įvertinimą su surinktais realiais duomenimis.

Tolimesniuose skyreliuose bus pateiktas lakoniškas kurso dėstymo procesas.

3. Matematinio modeliavimo metodologija

Daugelio sričių mokslininkus nuo seno domina gamtoje bei visuomenėje natūraliai besiformuojančios, savarankiškai funkcionuojančios, besivystančios arba žlungančios sistemos. Savaiminis organizuotų sandorių formavimasis pastebimas gamtoje, sociumuose, technologijose. Norint giliau pažinti ir suvokti tokių (dažnai pakankamai sudėtingų) sistemų dinamiką ir evoliuciją, reikia kurti jų matematinius modelius. Jų pagalba galima prognozuoti bei valdyti tokias sistemas. Pastaruoju metu matematiniai modeliai plačiai taikomi informaciniams, ekonominiams–finansiniams, demografiniams, ekologiniams ir kitiems reiškiniams analizuoti.

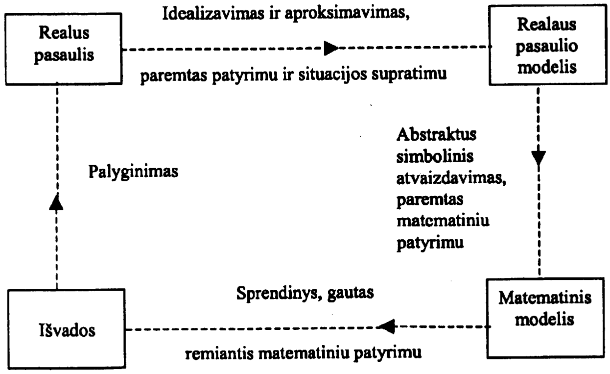
Matematinis modeliavimas iš esmės yra realaus pasaulio uždavinių pavertimas matematiniais uždaviniais, jų sprendimas ir gautų rezultatų interpretavimas realaus pasaulio kalba. Vaizdžiau tai galima išreikšti taip: mes pačiumpam realaus pasaulio uždavinį, neriame kartu su juo į matematikos okeaną, kurį laiką ten paplaukiojame ir po to išnyrame į paviršių kartu su realaus pasaulio uždavinio sprendiniu.

Modeliavimo procesas atvaizduotas 1 pav.

Jei modeliavimo rezultatai neatitinka realaus reiškinio, tai modelis modifikuojamas arba ieškoma nauja matematinio modelio struktūra.

Matematinis modelis yra realaus gyvenimo uždavinio aproksimacija. Jis turi būti pakankamai paprastas, kad galima būtų jį suprasti ir išspręsti, bet tuo pačiu pakankamai sudėtingas, kad kuo tiksliau būtų atspindėta realybė. Laikoma, kad matematinis modeliavimas yra labiau menas, negu mokslas ir negali būti mokomas formaliai. Sudarant matematinius modelius, reikėtų prisilaikyti tokių principų:

1. Gerai išsiaiškinti realaus pasaulio reiškinį, kuris bus tiriamas. Išskirti visas esmines šio reiškinio savybes ir atmesti neesmines.



1 pav. Modeliavimo procesas.

2. Nustatyti visus fizikos, chemijos, biologijos, socialinius ir ekonominius dėsningumus, kurie tiktų nagrinėjamai situacijai. Kartais tenka surinkti tam tikrą kiekį duomenų ir juos išanalizuoti tam, kad galima būtų giliau suprasti nagrinėjamą reiškinį.

3. Suformuluoti konceptualinį (žodinį) modelį.

4. Nustatyti visus kintamuosius $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir parametrus $a_1, a_2, \ldots, a_m$, kurie bus naudojami modelyje. Suskirstyti juos į žinomus ir nežinomus.

5. Parinkti labiausiai tinkamą matematinį modelį ir tinkamai aprašyti užduotį matematinių išraiškų pagalba

$$f_j\left(x_i, a_n, \frac{\partial}{\partial x_i}, \int \ldots \mathrm{d}x_i, d\right) \leqslant 0,$$

t.y. algebrinių, transcedentinių, diferencialinių, skirtuminių, integralinių, integro-diferencialinių lygčių ir nelygybių pagalba.

6. Nustatyti visus galimus modelio lygčių sprendimo būdus. Sprendimo metodai gali būti tokie:

- analiziniai; jie aiškiau atspindi tiriamą sistemą (procesą) ir charakterizuojančius ją parametrus. Tačiau analizinio modelio sudarymas yra sunkus uždavinys. Dažniausiai galima tik grubiai aprašyti sistemos funkcionavimą.
- skaitmeniniai; tyrimas kompiuterių pagalba mažiau akivaizdus, negu analiziniais metodais, tačiau modelių, tinkančių tirti skaitmeniniais metodais, klasė žymiai platesnė. Tyrimo rezultatai (lentelės, grafikai ir t.t.) mažiau kompaktiški, lyginant su analiziniais, ir reikalauja daug laiko atliekant skaičiavimus. Tačiau šis metodas vis plačiau taikomas, nes sparčiai vystosi kompiuterinė technika ir programinė įranga.
- sistemos tyrimas atsitiktinės paieškos metodais (imitacinis modeliavimas, sistemos imitavimas). Šiuo metodu atliekama reiškinio ar sistemos funkcionavimo imitacija, naudojant atsitiktinius dydžius ir procesus. Sistemos proceso imitacija vykdoma kompiuteriais specialiai sukurtomis programomis. Vienas iš tokių metodų yra Monte–Karlo metodas.

7. Jei nežymus modelio prielaidų pakeitimas leis gauti analizinį sprendinį, reikia ištirti šią galimybę. Jeigu būtini nauji metodai spręsti lygtims, reikia bandyti sukurti šiuos metodus.

8. Atlikti naudojamo metodo paklaidų analizę. Jei paklaidos nėra leidžiamose ribose, tai reikia keisti sprendimo metodą.

9. Galutinį sprendinį pervesti į žodinį interpretavimą.

10. Palyginti gautus rezultatus su realios sistemos stebėjimo duomenimis. Jei sutapimas geras, tai modelį galima naudoti. Priešingu atveju reikia ištirti modelio prielaidas ir pakeisti jas atsižvelgiant į gautų rezultatų ir stebėjimų skirtumus ir sudaryti tikslesnį modelį.

11. Tęsti procesą tol, kol bus gautas tinkamas modelis.

4. Matematinių modelių klasifikavimas

Matematiniai modeliai klasifikuojami pagal:

1. Tiriamų reiškinių sritį ar kryptį. Todėl kuriami matematiniai modeliai fizikoje (matematinė fizika), biologijoje, medicinoje, ekonomikoje (matematinė ekonomika ir ekonometrika), sociologijoje, inžinerijoje ir t.t.
2. Matematinių metodų panaudojimą sudarant modelius. Modeliavimui naudojame klasikinę algebrą, paprastąsias ir su dalinėmis išvestinėmis diferencialines lygtis, skirtumines lygtis, integralines ir integro-diferencialines lygtis, matematinį programavimą, stochastinius procesus ir t.t.
3. Modeliavimo tikslą. Matematiniai modeliai gali būti skirti reiškinių aprašymui, įsigilinimui į funkcionavimo esmę, prognozavimui, optimizavimui, valdymui ir pan.
4. Modelių prigimtį:
   - Matematiniai modeliai gali būti tiesiniai arba netiesiniai, priklausomai nuo to ar pagrindinės modelio lygtys yra tiesinės, ar netiesinės.
   - Matematiniai modeliai gali būti statiniai ar dinaminiai, priklausomai nuo to ar sistemos kitimas laike nagrinėjamas, ar ne.
   - Matematiniai modeliai gali būti determinuotieji arba stochastiniai, priklausomai nuo į juos įeinančių matematinių kintamųjų prigimties. Į vienus modelius įeina žinomos charakteristikos, t.y. dydžiai, kuriuos galima tiksliai išmatuoti ir valdyti; tokius modelius vadiname determinuotaisiais. Į kitą modelių klasę įeina nežinomos sistemos charakteristikos, t.y. dydžiai, kurių niekada negalima tiksliai išmatuoti ir turi atsitiktinį pobūdį; tokie modeliai vadinami stochastiniais. Modelis su stochastiniais kintamaisiais aprašomas tikimybių teorijos ir statistikos metodais. Determinuotieji modeliai dažniausiai aprašomi matematinės analizės metodais.
   - Matematiniai modeliai gali būti diskretieji arba tolydieji, priklausomai nuo to ar kintamieji modelyje yra diskretieji, ar tolydieji.

Tiesinius, statinius ir determinuotuosius modelius yra lengviau tirti negu netiesinius, dinaminius ar stochastinius modelius.

Tolydžiuosius modelius lengviau tirti negu diskrečiuosius, nes yra sukurta matematinės analizės ir diferencialinių lygčių teorija. Tačiau tolydieji modeliai yra paprastesni tik tada, kai galima gauti analizinius sprendinius. Priešingu atveju mes turime aproksimuoti tolydžiuosius modelius diskrečiaisiais modeliais, kad gautume skaitmeninius sprendinius. Egzistuoja ir tokie modeliai, kuriuose yra ir diskretieji ir tolydieji kintamieji kartu.

Dauguma realių modelių yra netiesiniai, dinaminiai arba stochastiniai. Tačiau dažnai kuriame tiesinius, statinius ir determinuotuosius modelius, nes juos lengviau tirti ir gauti pakankamai gerus apytikslius sprendinius.

Kita vertus, jei kintamieji iš esmės yra diskretieji, mes galime naudoti tolydžiuosius modelius tam, kad galėtume panaudoti diferencialinį ir integralinį skaičiavimą. Analogiškai, kai kintamieji iš esmės yra tolydieji, mes galime naudoti diskrečiuosius modelius, kad galėtume panaudoti kompiuterius.

5. Matematinių modelių pavyzdžiai

Šiame skyrelyje pateikiami įvairių tipų matematiniai modelių pavyzdžiai. Tolydžiojo determinuotojo modelio pavyzdys yra logistinė lygtis, aprašanti populiacijos dinamiką laike:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = N(t)\,(a - cN(t)),$$

čia

N – populiacijos dydis momentu t;

a – augimo intensyvumas be išorinės įtakos;

c – apibrėžta padidėjusios populiacijos tankio įtaka jos kitimui.

Šio modelio diskretusis atvejis atrodo taip:

$$N\big((n+1)\Delta t\big) = N(n\Delta t) + N(\Delta t)\big(a - cN(n\Delta t)\big)\Delta t, \qquad n \geqslant 0.$$

Diskrečiuoju stochastiniu modeliu galima aprašyti atsitiktinį klaidžiojimą tiesėje (atskiras Markovo proceso atvejis). Tarkime, kad atsitiktinis procesas turi $m + 1$ būsenų, o perėjimo tikimybė iš būsenos k į būseną $k + 1$ lygi p, o tikimybė pereiti iš būsenos k į būseną $k - 1$ lygi $1 - p$, čia $k = 1, \ldots, r - 1$. Pažymėkime p_k tikimybę, kad procesas yra būsenoje k. Būsenų tikimybės randamos iš lygčių sistemos

$$p_k = p \cdot p_{k+1} + (1-p) \cdot p_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, r,$$

su sąlyga $p_0 + p_2 + \ldots p_r = 1$. Šiuo procesu galima aprašyti vienkanalės aptarnavimo sistemos su eile funkcionavimą.

Stochastinis tolydusis modelis yra žymioji Black–Scholes diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis, aprašanti išvestinių vertybinių popierių (opcionių, ateities sandorių, išankstinių sandorių it kt.) vertės dinamiką:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

čia

$V(t, S)$ – išvestinio vertybinio popieriaus vertė, priklausanti nuo bazinio vertybinio popieriaus kainos S momentu t;

σ – yra akcijos kainos nepastovumo matas;

r – nerizikingoji palūkanų galia.

Laikoma, kad akcijos kainos S kitimas aprašomas tokia stochastine diferencialine lygtimi:

$$\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}W,$$

čia

μ – akcijos kainos trendo koeficientas;

W – Vinerio procesas.

Norint rasti konkretaus vertybinio popieriaus vertę, reikia prie lygties prijungti pradines ir kraštines sąlygas.

Reikia pabrėžti, kad sudarant matematinius modelius yra labai svarbu interpretuoti modelio (lygties) elementus (narius), siejant juos su realiais reiškiniais. Panagrinėkime Black–Schole diferencialinę lygtį. Tai yra parabolinio tipo diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis, reiškianti, kad ji turi antros eilės išvestinę atžvilgiu S ir pirmos eilės išvestinę kito kintamojo t atžvilgiu. Tokio tipo lygtys dar vadinamos difuzijos lygtimis ir jomis galima aprašyti:

- Vienos medžiagos difuziją į kitą medžiagą (dūmų dalelių pasklidimą ore).
- Šilumos plitimą iš vienos objekto dalies į kitą.
- Priešo ir aukos sistemas.
- Teršalų sklaidą iš teršimo šaltinio.

Daugeliu iš šių atvejų gaunamos sudėtingesnės lygtys negu Black–Scholes lygtis. Black–Scholes lygtį galima interpretuoti kaip sąveikos–konvekcijos–difuzijos lygtį.

6. Pabaiga

Rekomenduojama tokia matematinio modeliavimo modulio turinio struktūra :

- Matematinių modelių kūrimo metodologija ir jų klasifikavimas.
- Papras̆čiausių matematinių modelių iš įvairių mokslo sričių (mechanikos, technikos, chemijos, medicinos, genetikos ir kt.) sudarymo iliustravimas.
- Sudėtingų sistemų (ekologinių ir ekonominių) matematinių modelių kūrimas ir jų analizė.

Matematinio modeliavimo dėstymo patirtis parodė, kad studentams šis dalykas patinka, bet tuo pačiu ir sudėtingas, nes jiems sunkiai sekasi susieti formalius matematinius sąryšius su realiu pasauliu. Tačiau parinkus įdomius modelius (pvz., sistema „plėšrūnas ir auka", paklausos ir pasiūlos modeliai) modulio medžiaga pakankamai gerai įsisavinama. Įgytos žinios sėkmingai panaudojamos rašant baigiamuosius bakaulaurų ir magistrantų darbus.

Literatūra

[1] J. Berry, D.N. Burghes, I.D. Huntley, D.J.G. James, A.O. Moscardini, *Teaching and Applying Mathematical Modelling*, Ellis Hordwood Limited (1984).
[2] E. Beltrami, *Mathematics for Dynamic Modeling*, Academic Press, Inc. (1987).
[3] J.N. Kapur, *Mathematical Modelling*, John Wiley & Sons (1988).
[4] M. Mesterton–Gibbons, *A Concrete Approach to Mathematical Modelling*, Addison–Wesey (1989).
[5] Haberman, *Mathematical Models*, Prentice–Hall (1977).
[6] D.L. Clements, *An Introduction to Mathematical Models in Economic Dynamics*, North Oxford Academic (1984).
[8] Internete: `http://www.indiana.edu/~hmathmod/modelmodel.html`
[9] Internete: `http://homepages.ius.edu/CLANG/m305/modeling.htm`
[10] Internete: `http://www.math.usouthal.edu/~hitt/courses/590/modeling.html`
[11] Internete: `http://www.infj.ulst.ac.uk/~cdmx23/ictma7.html`

On teaching mathematical modelling

E. Valakevičius

The purposes of this paper is to suggest aims and learning outcomes in teaching mathematical modelling and how to present material of the subject.