Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 466–470

Apie adityviosios aritmetikos plėtinio galimybę

Livija MALIAUKIENĖ (VPU)
el. paštas: maliaukiene@vpu.lt

Nagrinėsime adityviosios aritmetikos su apribotu skirtumu plėtinį, prijungiant termo dalybą iš natūrinio skaičiaus.

Sistema K_1^*

Tegu K^* – sekvencinis predikatų su lygybe skaičiavimas su įprastomis sekvencinėmis taisyklėmis loginiams simboliams ir lygybei bei sekančiomis aksiomomis neloginiams simboliams $o, {}', P, +, \dot{-}$:

$$\text{A1. } \to t' \neq 0; \quad \text{A2. } \to P0 = 0, \quad \text{A3. } \to Pt' = t; \quad \text{A4. } \to t + 0 = t,$$
$$\text{A5. } \to t + s' = (t+s)'; \quad \text{A6. } \to t \dot{-} 0 = t; \quad \text{A7. } \to t \dot{-} s' = P(t \dot{-} s),$$

o taip pat aksiomomis

$$\text{B1. } \to t \neq 0 \supset (Pt)' = t; \quad \text{B2. } \to t + s = s + t;$$
$$\text{B3. } \to (t+s) + r = t + (s+r); \quad \text{B4. } \to t + s = t + r \supset s = r;$$
$$\text{B5. } \to t \dot{-} s \neq 0 \supset (t \dot{-} s) + s = t; \quad \text{B6. } \to t \neq s \supset t \dot{-} s \neq 0 \vee s \dot{-} t \neq 0;$$
$$\text{B7. } \exists z\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1} kz + i = t\Big), \ k \in N.$$

Šioje sistemoje reiškinio $t < s$ apibrėžimas įvedamas formule

$$t < s \sim s \dot{-} t \neq 0. \tag{1}$$

Kaip įrodyta [1], sistemoje K^* įrodoma indukcijos aksioma

$$\to \mathcal{A}(0) \& \forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')] \supset \forall x \mathcal{A}(x), \tag{IA}$$

kurios indukcinė formulė gali turėti kvantorius tik tokio tipo paformulėse:

$$\exists z\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1} kz + i = t\Big), k \in N.$$

K_1^* pažymėsime sistemą, gaunamą iš K^*, prijungus simbolį $\left[\frac{t}{n}\right]$ kartu su aksiomomis:

$$\text{A8.} \to \left[\frac{0}{n}\right] = 0$$

$$\text{A9.} \to \left(n\left[\frac{t}{n}\right] + 1 = t + 1 \supset \left[\frac{t+1}{n}\right] = \left[\frac{t}{n}\right] + 1\right)$$
$$\& \left(n\left[\frac{t}{n}\right] + 1 \neq t + 1 \supset \left[\frac{t+1}{n}\right] = \left[\frac{t}{n}\right]\right), \quad n = 2, 3, \ldots$$

bei keičiant aksiomą B7 aksiomomis

$$\text{B8.} \to \bigvee_{i=0}^{n-1} n\left[\frac{t}{n}\right] + i = t,$$
$$\text{B9} \to \left[\frac{nt+s}{n}\right] = t + \left[\frac{s}{n}\right], \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Aksiomos A8, A9, B8, B9 buvo pasiūlytos J.S. Shepherdson'o [2].

Reiškinį $t \equiv s(\mathrm{mod}\, n), n = 2, 3, \ldots$ sistemoje K_1^* apibrėšime tokiu būdu:

$$t \equiv s(\mathrm{mod}\, n) \sim t = n\left[\frac{t \dot{-} s}{n}\right] + s \vee s = n\left[\frac{s \dot{-} t}{n}\right] + t. \tag{2}$$

Pastebėsime, kad sistemoje K_1^* įrodoma indukcijos aksioma IA su bekvantorine indukcine formule $\mathcal{A}(x)$ (žr. [1]).

Praplėsime sistemą K_1^*, įvesdami termo dalybą iš skaičiaus $n \mid t$, $n = 1, 2, \ldots$ tokiu būdu:

$$n \mid t \Leftrightarrow \exists z(nz = t), \tag{3}$$

suprasdami nz kaip $\overbrace{z + z + \cdots + z}^{n}$.

Lema. *Tegu a – termas, $n = 1, 2, \ldots$, tuomet sistemoje K_1^* įrodoma sekvencija*

$$\to a \equiv 0(mod\, n) \sim n \mid a.$$

Įrodymas. Dėl (2), (3) bei $\sim$ apibrėžimo, reikia įrodyti sekvencijas

$$a = n\left[\frac{a}{n}\right] \vee a = 0 \to \exists z(nz = a) \tag{4}$$

ir

$$\exists z(nz = a) \to a = n\left[\frac{a}{n}\right] \vee a = 0. \tag{5}$$

(4) gaunama taisyklės $\to\exists$ su $z = \left[\frac{a}{n}\right]$ ir $z = 0$ pagalba, o (5) – taisyklių $\exists\to$ bei $\dfrac{r = s, \Gamma^\alpha_s \to \Delta^\alpha_s}{r = s, \Gamma^\alpha_r \to \Delta^\alpha_r}$ (S) pagalba.

Išvada. Remiantis (5), gauname, kad

$$n \mid a \sim a = n\left[\frac{a}{n}\right]. \tag{6}$$

Teorema. *Tegu a – termas, $n, m, r = 1, 2, \ldots$, tuomet sistemoje K_1^* įrodomos šios $n \mid a$ savybės:*

1) $\to n \mid na$,
2) $\to n \mid n$,
3) $\to n > 1 \supset \neg\,(n \mid a \& n \mid a')$,
4) $\to a \neq 0 \supset (n \mid a \supset 0 < n \leqslant a)$,
5) $\to n \mid m \;\&\; m \mid r \supset n \mid r$,
6) $\to \neg(n \mid a) \supset \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} n \mid a^{(i)}$.

Įrodymas. Remiantis lema, 1) ir 2) yra atitinkamai sekvencijos $\to na \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$ ir $\to n \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$, kurios įrodytos [1]. 3) sekvencijos įrodymas konstruojamas tokiu būdu: panaudoję taisykles $\to\supset$, $\to\neg$, $\&\to$ bei lemos išvadą, gauname sekvenciją $n > 1$, $a = n\left[\frac{a}{n}\right]$, $a' = n\left[\frac{a'}{n}\right] \to$, iš kurios su taisyklės S pagalba gaunama sekvencija $n > 1$, $n\left[\frac{a}{n}\right] + 1 = n\left[\frac{a'}{n}\right] \to$. Galimi (žr. aksiomą A9) atvejai:

$$\left[\frac{a'}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right] \quad \text{arba} \quad \left[\frac{a'}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right] + 1.$$

Pirmuoju atveju turime:

$$\cfrac{\cfrac{\to 0' \neq 0}{n > 1\,,\ n\left[\frac{a}{n}\right] + 1 = n\left[\frac{a}{n}\right] \to}\,[B4^*]}{n > 1\,, n\left[\frac{a}{n}\right] + 1 = n\left[\frac{a'}{n}\right],\ \left[\frac{a'}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right] \to}\,[S],$$

čia $(B4^*)$ yra taisyklė

$$\frac{s = r,\ \Gamma \to \Delta}{t + s = t + r,\ \Gamma \to \Delta}.$$

Antruoju atveju gauname:

$$\frac{\to \neg\,(n > n)}{\qquad\qquad}\,[S]$$

$$\cfrac{\cfrac{n>1,\ 1=n\to}{n>1, n\left[\frac{a}{n}\right]+1=n\left[\frac{a}{n}\right]+n\ \to}\,[B4^*]}{n>1, n\left[\frac{a}{n}\right]+1=n\left[\frac{a'}{n}\right],\ \left[\frac{a'}{n}\right]=\left[\frac{a}{n}\right]+1\to}\,[S]$$

4) sekvencijos įrodymas konstruojamas taip:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\to\ 0=0}{n=0,\ a\neq 0,\ a=n\left[\frac{a}{n}\right]\to}\,[\alpha_3] \qquad \cfrac{\cfrac{\to 0=0}{a\neq 0,\ \left[\frac{a}{n}\right]=0,\ a=n\left[\frac{a}{n}\right]\to}\,[\alpha_6]}{}\,[\alpha_5]}{a\neq 0, n\mid a\to\ 0<n}\,[\alpha_2] \qquad \cfrac{a\neq 0,\ a<n,\ n\mid a\to}{a\neq 0,\ n\mid a\to n\leqslant a}\,[\alpha_4]}{\to\ a\neq 0\supset(n\mid a\supset 0<n\&n\leqslant a)}\,[\alpha_1]$$

čia $\alpha_1 \lesseqgtr \to\supset,\ \to\ \&$; $\alpha_2 \lesseqgtr 1^*, (6)$; $\alpha_3 \lesseqgtr S,\ \neg\ \to$; $\alpha_4 \lesseqgtr 1^*,\ 2^*$; $\alpha_5 \lesseqgtr 3^*$, lemos išvada; $\alpha_6 \lesseqgtr S,\ \neg\ \to$; 1^* ir 2^* yra šios taisyklės:

$$\frac{\neg\mathcal{F},\ \Gamma\to\ \Delta}{\Gamma\ \to\ \mathcal{F},\ \Delta}\ (1^*);$$

taisyklė

$$\frac{s<t,\ \Gamma\to\ \Delta}{\neg\,(t\leqslant s),\ \Gamma\ \to\Delta}\ (2^*)$$

gaunama iš aksiomos B6 bei (1) apibrėžimo pjūvio taisyklės pagalba; taisyklė

$$\frac{\left[\frac{t}{n}\right]=0,\ \Gamma\to\ \Delta}{t<n,\ \Gamma\to\ \Delta}\ (3^*)$$

įrodyta [1].

5) sekvencija įrodoma tokiu būdu:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\to\ nab=nab}{na=m,\ mb=r\ \to\ \exists v(nv=nab)}\,[\to\ \exists\,]}{\exists z(nz=m),\ \exists y(my=r)\ \to\exists v(nv=r)}\,[\alpha_2]}{n\mid m,\ m\mid r\ \to\ n\mid r}\,[(3)]}{\to\ n\mid m\ \&\ m\mid r\ \supset\ n\mid r}\,[\alpha_1]$$

$\alpha_1 \lessgtr \to \supset$, $\& \to$; $\alpha_2 \lessgtr \exists \to$, S.

6) sekvencijos įrodymas konstruojamas tokiu būdu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a + (n \dot{-} k) \equiv 0(\mathrm{mod}\, n) \ \to a + (n \dot{-} k) \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)}{a + (n \dot{-} k) \equiv (k + (n \dot{-} k))(\mathrm{mod}\, n) \ \to \bigvee_{i=1}^{n-1} n \mid a^{(i)}} [\alpha_4]}{\bigvee_{k=1}^{n-1} a \equiv k(\mathrm{mod}\, n) \to \bigvee_{i=1}^{n-1} n \mid a^{(i)}} [\alpha_3]}{\neg(a \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)) \ \to \ \bigvee_{i=1}^{n-1} n \mid a^{(i)}} [\alpha_2]}{\to \ \neg\, (n \mid a) \ \supset \ (n \mid a' \vee n \mid a'' \vee \ldots \vee n \mid a^{(n-1)})} [\alpha_1]$$

čia $\alpha_1 \lessgtr \to \supset$, lema; $\alpha_2 \lessgtr$ panaudotas ekvivalentumas $\neg\, (t \equiv s(\mathrm{mod}\, n)) \sim \bigvee_{k=1}^{n-1} t \equiv (s + k)(\mathrm{mod}\, n)$, įrodytas [1]; $\alpha_3 \lessgtr \vee \to$, panaudotas ekvivalentumas $t \equiv s(\mathrm{mod}\, n) \sim t + r \equiv s + r(\mathrm{mod}\, n)$, įrodytas [1], $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $\alpha_4 \lessgtr \to \vee$, lema, $B5^*$, 13^*; čia $B5^*$ yra taisyklė $\frac{(t \dot{-} s)+s=t, \Gamma \to \Delta}{t \dot{-} s \neq 0, \Gamma \to \Delta}$, o 13^* yra [1] įrodyta taisyklė $\frac{t \equiv s(\mathrm{mod}\, n),\ [\Gamma \to \Delta]_{q(s)}}{t \equiv s(\mathrm{mod}\, n),\ [\Gamma \to \Delta]_{q(t)}}$, kurioje lyginys $t \equiv s(\mathrm{mod}\, n)$ šiuo atveju yra įrodomas (žr. [1], 8 lema) lyginys $nt \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$. Gautoji viršutinė sekvencija yra aksioma $A \to A$. Teorema įrodyta.

Literatūra

[1] L. Maliaukienė, Apie kai kurias adityviosios aritmetikos sistemas su apribotu skirtumu (rusų kalba), *Liet. Matem. Rink.*, **30**(2), 319–336 (1990).

[2] J.S. Shepherdson, Non-standard models for fragments of number theory, *Symp. on Theory of Models*, Amsterdam, **4**, 25–31 (1967).

About the possibility of the extension of the additive arithmetic

L. Maliaukienė

In this paper the sequential variant of the additive arithmetic with equality and the non-logical symbols $o, \prime, P, +, \dot{-}$ is investigated and the proovable properties of the additional function $n|t$ is ascertained.