Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 599–603

Netolydaus Galiorkino metodo ir baigtinių skirtumų metodo stabilumo palyginimas

Raimondas ČIEGIS (VGTU), Remigijus ČIEGIS (VU), Olga SUBOČ (VGTU) *
el. paštas: rc@fm.vtu.lt, os@fm.vtu.lt

1. Įvadas

Virtualieji modeliai labai plačiai naudojami įvairiose technikos, aukštųjų technologijų, mokslo srityse. Daugelis tiriamų procesų pasižymi ta savybe, kad modelio sprendinys greitai kinta tik lokaliose srityse, o šios sritys irgi juda kintant laikui. Todėl efektyvūs skaitiniai sprendimo metodai turi būti adaptyvūs, prisitaikantys prie modeliuojamo proceso savybų. Adaptyvių erdvinių diskrečiųjų tinklų sudarymas yra aktyviai nagrinėjama skaičiavimo matematikos sritis. Šiame darbe tirsime naujus uždavinius, atsirandančius, kai diskretusis erdvinis tinklas nėra pastovus kintant laikui.

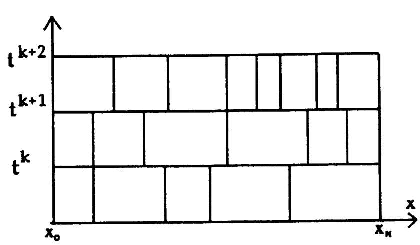
Nagrinėkime vienmatį parabolinį uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\ U(0,t) = \mu_0(t), \quad U(1,t) = \mu_1(t), & \\ U(x,0) = U_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Apibrėžkime diskrečiuosius tinklus:

$$\omega_\tau = \{t^k\colon\ t^k = k\tau,\ k = 1,2,\dots,K\},$$
$$\omega_h(t^k) = \{x_j^k\colon\ x_0^k = 0, \quad x_{N_k}^k = 1, \quad x_j^k = x_{j-1}^k + h_{j-0,5}^k\}.$$

Diskretusis tinklas $\omega_h(t^k)$ nėra pastovus: gali keistis tiek mazgų skaičius, tiek ir jų padėtis (žr. 1 pav.).



1 pav. Adaptyvusis diskretusis tinklas.

*Šį darbą dalinai finansavo Eureka projektas OPTPAPER 2623, E-2002.02.27

Pagrindinis šio darbo tikslas yra įvertinti baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos paklaidos ir interpoliavimo paklaidos poveikį diskrečiojo sprendinio globalios paklaidos dydžiui.

2. Baigtinių skirtumų schema

Norėdami supaprastinti analizę, tarkime, kad kiekviename laiko sluoksnyje diskrečiojo tinklo žingsnis yra pastovus, bet mazgų skaičius N_k gali būti ir skirtingas. Diferencialinį (1) uždavinį aproksimuojame baigtinių skirtumų schema

$$\begin{cases} \dfrac{U_j^k - I_{k-1}^k U_j^{k-1}}{\tau} = U_{\bar{x}x}^k + f(x_j^k, t^k), & 0 < j < N_k, \\ U_0^k = \mu_0(t^k), \quad U_{N_k}^k = \mu_1(t^k), & \\ U^0(x_j) = U_0(x_j), & x_j \in \omega_k(t^0). \end{cases} \tag{2}$$

Čia pažymėjome baigtinių skirtumų schemos sprendinį $U_j^k = U(x_j^k, t^k)$, o

$$I_{k-1}^k U_1^{k-1} = \frac{x_j^k - x_l^{k-1}}{x_{l+1}^{k-1} - x_l^{k-1}} U_{l+1}^{k-1} + \frac{x_{l+1}^{k-1} - x_j^k}{x_{l+1}^{k-1} - x_l^{k-1}} U_l^{k-1}.$$

yra tiesinis interpoliantas, kurio pagalba apskaičiuojame sprendinio reikšmę apatiniame laiko sluoksnyje naujo tinklo taškuose.

Tegul $Z_j^k = u(x_j^k, t^k) - U_j^k$ yra globalioji diskrečiojo sprendinio paklaida. Ji tenkina tokią baigtinių skirtumų schemą:

$$\begin{cases} \dfrac{Z_j^k - Z_j^{k-1}}{\tau} = Z_{\bar{x}x}^k + \Psi_A + \Psi_I, \\ Z_0^k = 0, \quad Z_{N_k}^k = 0. \end{cases}$$

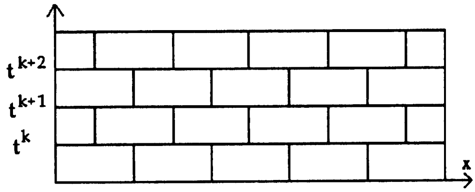
1 lema [1]. *Tarkime, kad $u(x,t) \in C_4^2(Q_t)$. Tada baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos paklaida Ψ_A ir interpoliavimo paklaida Ψ_I yra įvertinamos nelygybėmis:*

$$|\Psi_A| \leqslant C(h^2 + \tau), \quad |\Psi_I| \leqslant \frac{Ch^2}{\tau}.$$

Remdamiesi gerai žinomomis neišreikštinės Eulerio schemos stabilumo C normoje savybėmis (žr. [2]), įrodome tokį pagrindinį rezultatą apie (2) baigtinių skirtumų schemos sprendinio konvergavimą:

1 teorema. *Baigtinių skirtumų schemos* (2) *sprendinys konverguoja į* (1) *diferencialinio uždavinio sprendinį ir teisingas globalios paklaidos įvertis:*

$$||Z^k||_\infty \leqslant C\left(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau}\right).$$



2 pav. Diskretusis tinklas.

Iš 1 teoremos gauname nestandartinę išvadą, kad diskrečiojo sprendinio paklaida didėja, kai mažiname diskretųjį parametrą τ:

$$||Z^k||_\infty \leqslant C \begin{cases} h, & \text{jei } \tau = \mathrm{O}(h), \\ \sqrt{h}, & \text{jei } \tau = \mathrm{O}(h^{1,5}), \\ \mathrm{O}(1), & \text{jei } \tau = \mathrm{O}(h^2). \end{cases}$$

Parodysime, kad 1 teoremos įverčiai yra tikslūs. Spręskime pavyzdį, kuriame (1) uždavinio tikslus sprendinys yra funkciją $u(x,t) = \mathrm{e}^t \sin(\pi x)$, o diskretusis tinklas $\omega_h(t^k)$ atvaizduotas 2 pav.

Skaičiavimo eksperimento rezultatai yra pateikti 1 lentelėje, kur γ pažymėjome eksperimentinį diskrečiojo sprendinio konvergavimo greitį.

1 lentelė
Skaitinio eksperimento rezultatai naudojant schemą (2)

	N	τ	$\|\|Z^k\|\|_\infty$	γ
$\tau = 4h$	80	0,05	5,55 e−3	1,0099
	160	0,025	2,71 e−3	1,1035
	320	0,0125	1,34 e−3	2,4004
	640	0,00625	6,65 e−4	4,8924
$\tau = 2h^{1,5}$	160	3,12 e−3	3,37 e−3	0,252
	320	1,10 e−3	2,56 e−3	0,395
	640	3,91 e−4	1,87 e−3	0,453
	1280	1,38 e−4	1,34 e−3	0,478
$\tau = 40h^2$	80	6,25 e−3	6,65 e−3	−1,04
	160	1,56 e−3	7,41 e−3	−0,18
	320	3,91 e−4	7,62 e−3	−0,04
	640	9,76 e−5	7,67 e−3	−0,01

3. Trūkus Galiorkino metodas

Šiame skirsnyje tą patį (1) uždavinį spręsime trūkiuoju Galiorkino metodu [3]. Nagrinėkime vieną laiko sluoksnį

$$I_k = \{(x,t)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad t^{k-1} \leqslant t \leqslant t^k\}.$$

Apibrėžiame funkcijų erdvę

$$W^{(0)} = \{U(x,t)\colon\ U\,|_{I_k} \in S^1_{h,k}\},$$

kur pažymėjome gabalais tiesinių funkcijų erdvę

$$S^1_{h,k} = \left\{v(x,t)\colon\ v(x,t) = \sum_{j=0}^{N_k} = c^j_k \varphi^k_j(x)\right\}.$$

Trūkiojo Galiorkino metodo sprendinys $U \in W^{(0)}$ yra pastovus kiekviename intervale I_k ir tenkina lygybę

$$\tau(U', v') + \left([U^{k-1}], v^+_{k-1}\right) = \int\limits_{t^{k-1}}^{t^k} (f, v)\mathrm{d}t, \qquad \forall v \in S^1_{h,k}, \tag{3}$$

čia pažymėjome:

$$\begin{aligned}
&[U^{k-1}] = U^k - U^{k-1},\\
&v^\pm_k = v(t^k \pm 0), \quad v^k = v^-_k = v^+_{k-1},\\
&U^-_0 = u_0.
\end{aligned}$$

Vėl gauname baigtinių skirtumų lygtį:

$$\frac{U^k - P_h U^{k-1}}{\tau} = U^k_{\bar{x}x} + \frac{1}{\tau} \int\limits_{t^{k-1}}^{t^k} (P_h f)\mathrm{d}t, \tag{4}$$

kur $P_h f$ apibrėžia funkcijos L_2 projekciją

$$(P_h f, v) = (f, v), \qquad \forall v \in S^1_{h,k}. \tag{5}$$

Taigi pagrindinis skirtumas tarp Galiorkino schemos ir (2) baigtinių skirtumų schemos yra tas, kad funkcijos reikšmė apatiniame laiko sluoksnyje yra apskaičiuojama panaudojant projektavimo operatorių, o ne interpoliavimo operatorių. Panaudodami [3] darbo metodiką, nesunkiai gauname tokį teiginį:

2 lentelė
Skaitinio eksperimento rezultatai naudojant schemą (2)

	N	τ	$\|Z^k\|_\infty$	γ
$\tau = 4h$	80	0,05	1,12 e−2	0,986
	160	0,025	6,19 e−3	0,993
	320	0,0125	3,11 e−3	0,997
	640	0,00625	1,55 e−3	0,998
$\tau = 2h^{1,5}$	160	3,12 e−3	3,98 e−4	1,521
	320	1,10 e−3	1,40 e−4	1,508
	640	3,91 e−4	4,93 e−5	1,506
	1280	1,38 e−4	1,74 e−5	1,504
$\tau = 40h^2$	80	6,25 e−3	8,12 e−4	1,99
	160	1,56 e−3	2,03 e−4	2,00
	320	3,91 e−4	5,08 e−5	2,00
	640	9,76 e−5	1,27 e−5	2,00

2 teorema. *Trūkiojo Galiorkino metodo sprendinys konverguoja į* (1) *diferencialinio uždavinio sprendinį ir teisingas globalios paklaidos įvertis:*

$$\|u(t^k) - U^k\| \leqslant C\Big(2 + \log\frac{t^k}{\tau}\Big) \max_{1\leqslant k\leqslant K} \Big(\|h_k^2 f\|_{I_k} + \|\tau f\|_{I_k}$$
$$+\|[U_{k-1}]\| + \|\frac{h_k^2}{\tau}[U_{k-1}]\|^*\Big) \leqslant C(\tau + h^2).$$

$\|\cdot\|^*$ narys atsiranda tik tada, jei $S^1_{h,k-1} \not\subseteq S^1_{h,k}$.

2 lentelėje pateikiame skaičiavimo eksperimento rezultatus, patvirtinančius teorines išvadas.

Literatūra

[1] A.A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow (1989) (in Russian).
[2] A.A. Samarskii, P.N. Vabischevich, P.P. Matus, *Difference Schemes with Operator Averaging*, COT2, Minsk (1998) (in Russian).
[3] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, *Computational Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

Comparison of the stability of discontinuous Galerkin and finite-difference methods

R. Čiegis, Rem. Čiegis, O. Suboč

In this article we present stability analysis of two discrete schemes, which are used to solve a parabolic problem on adaptive nonstationary meshes. The influence of interpolation and projection errors is investigated. It is proved that interpolation error accumulates during computations while projection error has much better stability properties. Numerical examples illustrate these theoretical results.