Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 604–608


# Apie vieno minimizacijos uždavinio skaitinį sprendimą

Raimondas ČIEGIS (VGTU), Violeta PAKENIENĖ (MII)
*el. paštas: rc@fm.vtu.lt, vp@fm.vtu.lt*

## 1. Įvadas

Tiesinių lygčių sistemų sprendimui dažnai naudojami iteraciniai algoritmai. Jų konvergavimo greitis esminiai priklauso nuo iteracinio metodo parametrų parinkimo. Šis uždavinys ypač aktualus, kai sprendžiame tiesinių lygčių sistemas, aproksimuojančias elipsinio tipo uždavinius. Dažniausiai optimalių parametrų parinkimo uždavinys pakeičiamas jam artimu paprastesniu uždaviniu, kurio sprendinys yra žinomas. Pvz., diskretusis matricos spektras yra aproksimuojamas tolydžiu intervalu, kuriam priklauso visos matricos tikrinės reikšmės. Tačiau tokiu būdu prarandame dalį specifinės informacijos ir todėl iteracinis metodas gali konverguoti lėčiau. Šiame darbe pateiktas mūsų sudarytas skaitinis optimalių iteracinių parametrų radimo algoritmas ir ištirta iteracinių metodų konvergavimo greičio priklausomybė nuo matricos spektro savybių.

## 2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime klasikinį iteracinių parametrų parinkimo uždavinį:

$$w(\tau_0) = \min_{\tau_1,\dots,\tau_n} \max_{\lambda\in\Omega} q(\tau,\lambda), \qquad \Omega = [A,B], \tag{1}$$

čia $q(\tau,\lambda)$ – iteracinio metodo stabilumo funkcija, o $[A,B]$ intervalas, kuriam priklauso visos matricos tikrinės reikšmės.

Mes taip pat nagrinėsime ir modifikuotą variacinį uždavinį, kai daroma prielaida, kad matricos tikrinės reikšmės priklauso dviems (bendru atveju keliems) atskirtiems intervalams:

$$w(\tau_0) = \min_{\tau_1,\dots,\tau_n} \max_{\lambda\in\Omega} q(\tau,\lambda), \qquad \Omega = [a,b]\cup[c,d]. \tag{2}$$

Kaip pavyzdį nagrinėsime dvi iteracinių metodų stabilumo funkcijas [2]:

$$q(\tau,\lambda) = |1-\tau\lambda|, \quad q(\tau,\lambda) = \left|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right|.$$

Pirmoji stabilumo funkcija būdinga išreikštiniams iteraciniams metodams, o antroji funkcija – neišreikštiniams metodams, konstruojamiems panaudojant išskaidymo algoritmus.

Klasikinis minimizacijos uždavinys (1) yra išsamiai išnagrinėtas, žinomi optimalių iteracinių parametrų teoriniai įverčiai:

a) jei iteracinio metodo stabilumo funkcija yra $q(\tau, \lambda) = |1 - \tau\lambda|$, tai (1) uždavinio sprendinius gauname panaudodami Čebyševo polinomų šaknis (žr. [3]);

b) jei iteracinio metodo stabilumo funkcija yra $q(\tau, \lambda) = \left|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right|$, tai iteraciniai parametrai parenkami iš optimalaus parametrų rinkinio (žr. [2]).

Tuo tarpu naujas minimizacijos uždavinys (2) analiziškai nėra išnagrinėtas. Optimaliems iteraciniams parametrams $\tau_1, \ldots \tau_n$ rasti mes sudarėme algoritmą.

**Uždavinio (2) sprendimo algoritmas:**

1. Sritį $\Omega$ padengiame tolygiu tinklu $\Omega_h$ ir atliekame perrinkimo žingsnį, randame potencialius sprendinių artinius.

2. Netiesiniu simplekso metodu surandame lokaliuosius minimumo taškus, kai pradiniu artiniu laikome pirmame algoritmo žingsnyje surastus taškus.

3. Geriausias iš lokaliojo minimumo sprendinių laikomas (2) uždavinio sprendiniu.

## 3. Dvimačių minimizacijos uždavinių skaitinio sprendimo rezultatų analizė

Norėdami patikrinti sudaryto algoritmo efektyvumą sprendėme klasikinį minimizacijos uždavinį (1), kurio sprendinį žinome. Visais atvejais buvo apskaičiuoti iteracinių parametrų artiniai su užduotu tikslumu. Testuose buvo sprendžiami dvimačiai ir trimačiai atvejai, šiame skyrelyje pateiksime dvimačio uždavinio rezultatus. 1 lentelės pirmame stulpelyje pateikta nagrinėjama stabilumo funkcija, antrame – pasirinktas spektro intervalas, trečiame – eksperimentiškai gautos optimalių iteracinių parametrų reikšmės, bei pats minimizacijos uždavinio sprendinys, ketvirtame stulpelyje – analogiškos reikšmės, gautos iš žinomų teorinių įverčių. Skaičiavimai atlikti $\epsilon = 10^{-4}$ tikslumu.

1 lentelė
Skaitinio eksperimento rezultatai dvimačiam atvejui

| Stabilumo funkcija | Spektras | Algoritmas | Teorija |
|---|---|---|---|
| $q = \|1 - \tau\lambda\|$ | $[10, 100]$ | $\tau_1 = 0,011516$ | $\tau_1 = 0,11518$ |
| | | $\tau_2 = 0,043135$ | $\tau_2 = 0,043140$ |
| | | $0,50315$ | $0,50311$ |
| $q = \left\|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right\|$ | $[10, 100]$ | $\tau_1 = 0,014508$ | $\tau_1 = 0,014517$ |
| | | $\tau_2 = 0,068886$ | $\tau_2 = 0,068894$ |
| | | $0,13753$ | $0,13749$ |

2 lentelėje pateikiame eksperimentinių skaičiavimų rezultatus, kai sprendžiame (2) uždavinį. Pirmame stulpelyje nurodytas pasirinktas klasterizuotas spektras, antrame –

2 lentelė
Dvimatis klasterizuotas atvejis

| Spektras | $q = \lvert 1 - \tau\lambda \rvert$ | $q = \lvert \frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda} \rvert$ |
|---|---|---|
| $[10,12] \cup [98,100]$ | $\tau_1 = 1,00991 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 9,06865 \cdot 10^{-2}$<br>$8,37293 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_1 = 1,09316 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 9,14723 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 3,57612 \cdot 10^{-2}$ |
| $[10,20] \cup [90,100]$ | $\tau_1 = 1,04919 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 6,80784 \cdot 10^{-2}$<br>$0,28572$ | $\tau_1 = 1,34610 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 7,42886 \cdot 10^{-2}$<br>$0,11252$ |
| $[10,50] \cup [90,100]$ | $\tau_1 = 1,14923 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 4,35077 \cdot 10^{-2}$<br>$0,500001$ | $\tau_1 = 1,45143 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 6,88973 \cdot 10^{-2}$<br>$0,13747$ |
| $[10,12] \cup [50,51] \cup [98,100]$ | $\tau_1 = 1,15015 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 4,33751 \cdot 10^{-2}$<br>$0,50113$ | $\tau_1 = 1,34610 \cdot 10^{-2}$<br>$\tau_2 = 7,42887 \cdot 10^{-2}$<br>$0,11252$ |

optimalių iteracinių parametrų reikšmės pirmajai stabilumo funkcijai, trečiame – analogiškos reikšmės antrajai nagrinėjamai funkcijai.

Iš gautųjų rezultatų pastebime, kad esant klasterizuotam spektrui optimalios iteracinių parametrų reikšmės labai skiriasi nuo klasikinio uždavinio atitinkamų reikšmių, o iteracinio metodo konvergavimo greitį pavyksta padidinti 4–6 kartus. Plečiant spektro intervalus, pastebimas optimalių iteracinių parametrų bei konvergavimo greičio spartus artėjimas prie klasikinio uždavinio sprendinių. Paskutiniai lentelės rezultatai rodo, kad esant nors ir labai siauriems spektro intervalams, bet išsidėsčiusiems įvairiose srities vietose, eksperimentiškai gauti optimalių parametrų rezultatai yra artimi klasikinio uždavinio sprendiniams.

## 4. Trimačių minimizacijos uždavinių skaitinio sprendimo rezultatų analizė

Šiame skyrelyje pateikiami skaičiavimo rezultatai, kai sprendžiame trimatį minimizacijos uždavinį. 3 lentelėje pateikiame eksperimentinių skaičiavimų rezultatus, kai sprendžiame (1) uždavinį. Skaičiavimai atlikti $\epsilon = 10^{-4}$ tikslumu.

4 lentelėje pateikiame eksperimentinių skaičiavimų rezultatus, kai sprendžiame trimatį (2) uždavinį.

Iš gautųjų rezultatų, darome išvadas, analogiškas dvimačių minimizacijos uždavinių atveju, t.y., esant klasterizuotam spektrui optimalios iteracinių parametrų reikšmės labai skiriasi nuo klasikinio uždavinio atitinkamų reikšmių, o iteracinio metodo konvergavimo greitį galima padidinti 4–10 kartų. Plečiant spektro intervalus, pastebimas optimalių iteracinių parametrų bei konvergavimo greičio spartus artėjimas prie klasikinio uždavinio sprendinių. Paskutiniai lentelės rezultatai skiriasi nuo analogiškų skaičiavimo rezultatų dvimačiam uždaviniui: šiuo atveju spektras turi būti platesnis, tik tada iteracinių parametrų reikšmės bus artimos klasikinio uždavinio sprendiniams.

3 lentelė
Skaitinio eksperimento rezultatai trimačiu atveju

| Stabilumo funkcija | Spektras | Algoritmas | Teorija |
|---|---|---|---|
| $q = \|1 - \tau\lambda\|$ | $[10, 100]$ | $\tau_1 = 0,010672$ | $\tau_1 = 0,010642$ |
| | | $\tau_2 = 0,018174$ | $\tau_2 = 0,018182$ |
| | | $\tau_3 = 0,062381$ | $\tau_3 = 0,062388$ |
| | | $0,27507$ | $0,27499$ |
| $q = \left\|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right\|$ | $[10, 100]$ | $\tau_1 = 0,011950$ | $\tau_1 = 0,011935$ |
| | | $\tau_2 = 0,031621$ | $\tau_2 = 0,031623$ |
| | | $\tau_3 = 0,083790$ | $\tau_3 = 0,083790$ |
| | | $3,60581 \cdot 10^{-2}$ | $3,60498 \cdot 10^{-2}$ |

4 lentelė
Trimatis klasterizuotas atvejis

| Spektras | $q = \|1 - \tau\lambda\|$ | $q = \left\|\frac{1-\tau\lambda}{1+\tau\lambda}\right\|$ |
|---|---|---|
| $[10, 12] \cup [98, 100]$ | $\tau_1 = 1,00981 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_1 = 1,01009 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_2 = 1,78803 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_2 = 7,48169 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_3 = 9,11983 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_3 = 9,48552 \cdot 10^{-2}$ |
| | $6,51469 \cdot 10^{-2}$ | $3,11046 \cdot 10^{-3}$ |
| $[10, 20] \cup [90, 100]$ | $\tau_1 = 1,02419 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_1 = 1,05216 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_2 = 1,68790 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_2 = 5,22208 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_3 = 7,07113 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_3 = 8,97077 \cdot 10^{-2}$ |
| | $0,21852$ | $1,37891 \cdot 10^{-2}$ |
| $[10, 50] \cup [90, 100]$ | $\tau_1 = 1,04336 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_1 = 1,19007 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_2 = 2,05681 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_2 = 3,18441 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_3 = 6,56226 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_3 = 8,56696 \cdot 10^{-2}$ |
| | $0,25487$ | $3,56696 \cdot 10^{-2}$ |
| $[10, 12] \cup [50, 60] \cup [98, 100]$ | $\tau_1 = 1,02293 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_1 = 1,14118 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_2 = 1,81819 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_2 = 2,31015 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\tau_3 = 8,14289 \cdot 10^{-2}$ | $\tau_3 = 9,18929 \cdot 10^{-2}$ |
| | $0,13645017$ | $2,09848 \cdot 10^{-2}$ |

## 5. Išvados

Šiame straipsnyje išnagrinėjome iteracinių metodų konvergavimo greičio priklausomybę nuo matricos spektro savybių. Sudarėme skaitinį optimalių parametrų radimo algoritmą, kurio pagalba galima spręsti ne tik klasikinį minimizacijos uždavinį, bet ir modifikuotą variacinį uždavinį.

## Literatūra

[1] A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow (1988) (in Russian).
[2] A. Samarskii, E.S. Nikolajev, *Methods for Solving Difference Equations*, Nauka, Moscow (1978) (in Russian).
[3] A. Samarskii, A.V. Goolin, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow (1989) (in Russian).
[4] V.N. Abrashin, R. Čiegis, V. Pakalnytė, Spectral stability analysis of one splitting iterative scheme, *Proc. of the 3rd International Conference FDS2000, Finite difference schemes: theory and applications*, Vilnius, 1-10 (2000).
[5] R. Čiegis, V. Pakalnytė, Spectral convergence analysis of multicomponent iterative methods, *Differential Equations*, **37**, 982–986 (2001).
[6] V.N. Abrashin, R. Čiegis, V. Pakenienė, N.G. Zhadaeva, Stability analysis of Seidel type multicomponent iterative method, *Mathematical Modelling and Analysis*, **7**, 1–10 (2002).
[7] G.I. Marchuk, *Splitting Methods*, Nauka, Moscow (1988) (in Russian).

# On the numerical solving of one minimization problem

R. Čiegis, V. Pakenienė

In this paper we consider the dependence of iterative methods convergence rate on iterative parameters selection. We propose the numerical algorithm determination of the optimal iterative parameters. Using it we solve classical minimization 2D and 3D problems and modificate 2D and 3D minimization problems and analyse the convergence rate dependence on the matrix spectral characteristics.