Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 630–635

Periodinių funkcijų aproksimacija splainais

Danutė PLUKIENĖ, Kostas PLUKAS (KTU)
el. paštas: kostas@pit.ktu.lt

1. Įvadas

Praktikoje dažnai tenka interpoliuoti periodines funkcijas. Tam tikslui naudojami periodiniai interpoliaciniai splainai, t.y., splainai su periodinėmis kraštinėmis sąlygomis.

Literatūroje [1–4] nagrinėjami periodiniai kubiniai splainai, kai jie užrašyti dalimis polinomine forma. Ši užrašymo forma yra neuniversali, todėl praktikoje dažnai naudojama kita splaino forma: splainas užrašomas tiesiniu B splainų dariniu –

$$g(x) = \sum_k b_k B_n^k(x), \tag{1}$$

čia b_k – tiesinio darinio koeficientai – realieji skaičiai, o $B_n^k(x)$ – n-osios eilės B splainas, nusakytas taško x_k atžvilgiu [1, 3, 4].

Šiame darbe nagrinėsime universalų n-osios eilės periodinio interpoliacinio splaino, nusakyto tiesiniu B splainų dariniu, apskaičiavimą: teorinius ir praktinės realizacijos klausimus, bei šių splainų taikymą kai kurių periodinių funkcijų aproksimacijai.

2. Pagrindinės formulės

Paprastai nagrinėjame splainus, kuriuos nusako baigtinis tinklelis Δ: $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$. Norint splainus užrašyti (1) formule, tinklelį Δ reikia išplėsti, įvedant papildomus taškus:

$$x_{-n} < x_{-n+1} < \ldots < x_{-1} < x_0 \text{ ir } x_N < x_{N+1} < \ldots < x_{N+n}.$$

Toks tinklelio išplėtimas yra laisvas: paprastai $x_{-i} = x_0 - i(x_1 - x_0)$, $x_{N+i} = x_N + i(x_N - x_{N-1})$, $i = \overline{1, n}$. Tada n-osios eilės splainas $g(x)$, apibrėžtas intervale $[x_0, x_N]$, užrašomas formule

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{N-1} b_k B_n^k(x). \tag{2}$$

Žemiau suformuluotam interpoliavimo uždaviniui spręsti reikės šių formulių.

Normalizuotieji n-osios eilės B splainai (toliau B splainai) [3, 4] tenkina rekurenčiąją lygtį

$$\begin{aligned} B_n^i(x) &= \frac{x - x_i}{x_{i+n} - x_i} B_{n-1}^i(x) + \frac{x_{i+n+1} - x}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} B_n^{i+1}(x), \quad n \geqslant 1, \\ B_0^i(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Splaino, užrašyto (2) formule, r-osios eilės išvestinė, kai $x \in [x_i, x_{i+1}]$, apskaičiuojama pagal formulę [3, 4]

$$g^{(r)}(x) = n(n-1)\ldots(n-r+1) \sum_{k=i-n+r}^{i} b_k^{(r)} B_{n-r}^k(x), \tag{4}$$

čia

$$b_k^{(0)} = b_k, \quad k = \overline{i-n, i},$$
$$b_k^{(l)} = \frac{b_k^{(l-1)} - b_{k-1}^{(l-1)}}{x_{n+k+1-l} - x_k}, \quad l = \overline{1, r}, \quad k = \overline{i-n+l, i}.$$

Suformuluokime periodinės funkcijos interpoliavimo uždavinį.

Tarkime, kad periodinė funkcija $y = f(x)$ su periodu $T = [a, b]$ nusakyta reikšmių lentele (x_i, y_i), $i = \overline{0, N}$, čia $x_0 = a$, o $x_N = b$.

Reikia apskaičiuoti n-osios eilės splainą $g(x)$, tenkinantį interpoliavimo ir kraštines periodines sąlygas:

$$\begin{cases} g(x_i) = y_i, & i = \overline{0, N}, \\ g^{(r)}(x_0) = g^{(r)}(x_N), & r = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{5}$$

Prastindami simboliką, kur tas nesukels painiavos, tolesniame dėstyme n-osios eilės B splainą $B_n^k(x)$ žymėsime $B_k(x)$.

Įvertindami, kad splainas užrašytas (2) formule, iš (5) sistemos gausime:

$$\begin{cases} b_{i-n}B_{i-n}(x_i) + b_{i-n+1}B_{i-n+1}(x_i) + \ldots + b_{i-1}B_{i-1}(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, N}, \\ b_{-n}B_{-n}^{(r)}(x_0) + b_{-n+1}B_{-n+1}^{(r)}(x_0) + \ldots + b_{-1}B_{-1}^{(r)}(x_0) - b_{N-n}B_{N-n}^{(r)}(x_N) \\ \quad -b_{N-n+1}B_{N-n+1}^{(r)}(x_N) - \ldots - b_{N-1}B_{N-1}^{(r)}(x_N) = 0, \quad r = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{6}$$

3. (6) sistemos formavimas ir sprendimas

[4] literatūroje yra pateikta paskalinė procedūra ***bg***, kuri skirta $B_n^k(t)$, $k = i - n, i - n + 1, \dots, i$, $t \in [x_i, x_{i+1}]$ reikšmėms apskaičiuoti pagal (3) formulę, o taip pat splaino, užrašyto (2) formule, r-osios eilės išvestinės reikšmei apskaičiuoti pagal (4) formulę, t.y., apskaičiuoti $g^{(r)}(t)$, kai $t \in [x_0, x_N]$.

Kreipiantis į šią procedūrą, kai $t = x_i$, $i = \overline{0, N}$, apskaičiuosime (6) sistemos pirmųjų $N + 1$ lygčių koeficientus.

Paėmus atitinkamą koeficientų b_k rinkinį, splainą $g(x)$ galima sutapatinti su norimu B splainu $B_n^k(x)$ (žr. (2) formulę). Pavyzdžiui, jei $b_{-n} = 1$, o $b_i = 0, i = \overline{-n+1, N-1}$, tai $g(x) = B_n^{-n}(x)$. Vadinasi, $g^{(r)}(x) = (B_n^{-n}(x))^{(r)}$. Tuo būdu, atitinkami parenkant koeficientų b_k rinkinius, apskaičiuosime $B_n^k(x)$, $k = \overline{-n, -1}$, ir $B_n^{N-n+k}(x)$, $k = \overline{0, n-1}$, reikiamų eilių išvestinių reikšmes, atitinkamai mazguose $x = x_0$ ir $x = x_N$, t.y., apskaičiuosime likusius (6) sistemos koeficientus.

Tik atskirais atvejais (kai $n = 3$ arba $n = 5$ ir $x_1 - x_0 \neq x_N - x_{N-1}$)(6) sistemą galima spręsti specifiniais perkelties metodais [2, 3]. Todėl čia šią sistemą siūlome spręsti universaliu modifikuotu QR metodu, kurio sudėtingumas yra $O(n^2 \cdot (N + n))$.

(6) sistemos matricos prieš QR metodą ir po jo atitinkamai yra:

$$
\begin{pmatrix}
a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & & & & & \\
 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & & & \\
 & & & & \dots & & & & \\
 & & & & & a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} \\
s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} & & g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\
 & & \dots & & & & & \dots & \\
s_{n-1,1} & s_{n-1,2} & \dots & s_{n-1,n} & & g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & \dots & g_{n-1,n}
\end{pmatrix}
$$

ir

$$
\begin{pmatrix}
a_{01} \ \dots \ a_{0n} & & & & p_{11} & \dots & p_{1n} \\
a_{11} \ a_{12} & \dots & a_{1n} & & & & \\
 & \dots & & & & \dots & \\
 & a_{N-n,1} & \dots & a_{N-n,n} & p_{N-n,1} & \dots & p_{N-1,n} \\
 & & \dots & & & \dots & \\
 & & a_{N-1,1} & & \dots & a_{N-1,n} & p_{N-1,n} \\
 & & & & a_{N,1} & \dots & a_{N,n} \\
 & & & & & s_{11} & s_{1,n-1} \\
 & & & & & & \dots \\
 & & & & & & s_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}.
$$

Tada **modifikuotas QR metodas** (nenormuojant vektoriaus, formuojančio atspindžio matricą) aprašomas taip.

Tiesioginis etapas
k-asis ($k = \overline{0, N}$) žingsnis
Vektoriaus, formuojančio atspindžio matricą, apskaičiavimas

$$c_i = s_{i1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad sum = \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2; \quad v = \sqrt{a_{k1}^2 + sum};$$
$$w = a_{k1} + v; \quad u = w^2 + sum.$$

Matricų a ir s perskaičiavimas

$$a_{k1} = -v;$$

visiems j nuo 2 iki n skaičiuosime:

$$d = 2 \cdot \left(w \cdot a_{kj} + \sum_{i=1}^{n-1} s_{ij} \cdot c_i \right) / u;$$
$$a_{kj} = a_{kj} - d \cdot w; \quad s_{i,j-1} = s_{ij} - d \cdot c_i; \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Matricos p formavimas ir g perskaičiavimas

$$l = \begin{cases} 1, & \text{jei } k \leqslant N - n, \\ k - N + n + 1, & \text{pr. atveju.} \end{cases}$$

Visiems j nuo l iki n skaičiuosime:

$$d = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} g_{ij} \cdot c_i / u;$$
$$p_{kj} = -d \cdot w; \quad g_{ij} = g_{ij} - d \cdot c_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Matricos s papildymas
Jei $(k < N - n)$ arba $(k = N)$, tai $s_{in} = 0$, priešingu atveju $s_{in} = g_{i,k-N+n+1}$; $i = \overline{1, n-1}$.
Laisvųjų narių perskaičiavimas

$$d = 2 \cdot \left(w \cdot y_k + \sum_{i=1}^{n-1} y_{N+i} \cdot c_i \right) / u.$$
$$y_k = y_k - d \cdot w; \quad y_{N+i} = y_{N+i} - d \cdot c_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Aprašytais veiksmais perskaičiuojame pirmąsias $N+1$ lygtis. Dabar perskaičiuosime $(n-1) \times (n-1)$ formato matricą s, kuri susiformavo po aprašytų $N+1$ žingsnių.

***k*-asis ($k = \overline{1, n-2}$) žingsnis**

$$sum = \sum_{i=k+1}^{n-1} s_{ik}^2; \quad v = \sqrt{s_{kk}^2 + sum};$$

$$w = s_{kk} + sign(s_{kk}) \cdot v; \quad s_{kk} = -sign(s_{kk}) \cdot v; \quad u = sum + w^2.$$

Visiems j nuo $k+1$ iki $n-1$ skaičiuosime:

$$sum = w \cdot s_{kj} + \sum_{i=k+1}^{n-1} s_{ik} \cdot s_{ij}; \quad d = 2 \cdot sum/u;$$

$$s_{kj} = s_{kj} - d \cdot w; \quad s_{ij} = s_{ij} - d \cdot s_{ik}; \quad i = \overline{k+1, n-1}.$$

Laisvųjų narių perskaičiavimas

$$sum = w \cdot y_{N+k} + \sum_{i=k+1}^{n-1} y_{N+i} \cdot s_{ik}; \quad d = 2 \cdot sum/u;$$

$$y_{N+k} = y_{N+k} - d \cdot w; \quad y_{N+i} = y_{N+i} - d \cdot s_{ik}; \quad i = \overline{k+1, n-1}.$$

Atvirkštinis etapas

$$b_i = \left(y_i - \sum_{j=i-N+1}^{n-1} s_{i-N,j} \cdot b_{N+j} \right) / s_{i-N,i-N}, \quad i = \overline{N+n-1, N+1},$$

$$b_i = \left(y_i - \sum_{j=2}^{n} a_{ij} \cdot b_{i+j-1} - \sum_{j=l}^{n} p_{ij} \cdot b_{j+N-1} \right) / a_{i1}, \quad i = \overline{N, 0},$$

čia

$$l = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \leqslant N-n, \\ i - N + n + 1, & \text{pr. atveju, visiems } i = \overline{N, 0}. \end{cases}$$

4. Aproksimavimo eksperimentinis tyrimas

Buvo sudaryta aprašyto metodo paskalinė procedūra ir atlikta funkcijų $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 2(1 + \cos \varphi)$, $x = 2(t - \sin t)$ aproksimacija.

Paaiškėjo, kad:

1) lyginės eilės periodiniai splainai, kai interpoliavimo mazgai nusakomi pastovaus žingsnio tinkleliu, neegzistuoja,

1 lentelė
Funkcijos $y = \cos x$ aproksimavimas splainais

x	y	Splaino eilė			
		3	7	11	15
0,0000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,7854	0,707107	0,687500	0,706888	0,707104	0,707107
1,5708	−0,000000	−0,000000	−0,000000	−0,000000	−0,000000
2,3562	−0,707107	−0,687500	−0,706888	−0,707104	−0,707107
3,1416	−1,000000	−1,000000	−1,000000	−1,000000	−1,000000
3,9270	−0,707107	−0,687500	−0,706888	−0,707104	−0,707107
4,7124	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
5,4978	0,707107	0,687500	0,706888	0,707104	0,707107
6,2832	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

2) aproksimavimo tikslumas gerėja arba didinant interpoliavimo mazgų skaičių, arba didinant splaino eilę,
3) prie to paties interpoliavimo mazgų skaičiaus splaino eilės padidinimas skaičiumi 2 aproksimavimo tikslumą apytiksliai padidina dviem eilėm.

1 lentelėje pateikta $y = \cos x$ aproksimacija, kai interpoliavimo mazgus apibrėžia pastovaus žingsnio h ($h = \pi/2$) tinklelis, prie įvairių n reikšmių.

Literatūra

[1] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer Verlag (1978).
[2] J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh, *The Theory of Splines and their Applications*, Academia Press, New York, London (1967).
[3] J.S. Zavjalov, B.I. Kvasov, V.A. Miroshnichenko, *The Methods of Spline-Functions*, Nauka, Moscow (1980) (in Russian).
[4] K. Plukas, *Skaitiniai metodai ir algoritmai*, Naujasis lankas, Kaunas (2001).

Interpolation of periodical functions by splines

D. Plukienė, K. Plukas

Interpolating periodical splines estimation methods are considered in this paper. Periodical spline universal implementation method is presented.