Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 656–662

Spūdaus skysčio tekėjimo išorinėje srityje lygčių aproksimacijos problemos

Teresė LEONAVIČIENĖ (MII)*
el. paštas: terese.brazauskaite@vpu.lt

1. Uždavinio formulavimas

Šiame darbe nagrinėjamas klampaus spūdaus skysčio tekėjimo išorinėje srityje linearizuoto uždavinio aproksimacijos klausimas.

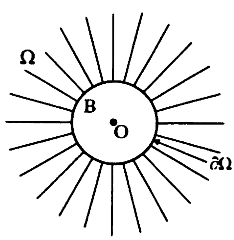
Tarkime, kad nagrinėjama sritis $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ turi tolydų kontūrą, o koordinačių pradžios taškas nepriklauso nagrinėjamai sričiai (1 pav.).

Nagrinėjamas linearizuotas uždavinys turi tokį pavidalą:

$$\begin{cases} -\mu_1\Delta \mathbf{v} - (\mu_1+\mu_2)\nabla \operatorname{div}\mathbf{v} + \nabla\sigma - \sigma\nabla\Phi = \mathbf{F}, & x\in\Omega,\\ \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v}) = -\operatorname{div}(\sigma\mathbf{w}), \quad x\in\Omega, & \\ \mathbf{v}=0, \quad x\in\partial\Omega, & \\ \mathbf{v}(x)\to 0, \quad \sigma(x)\to 0, \quad |x|\to\infty, & \end{cases} \tag{1.1}$$

kur $\mu_1>0$, $\mu_2 \geqslant -\frac{2}{3}\mu_1$, Φ – potencialas, kuris gali būti „didelis“, $\mathbf{F}, g$ ir $\mathbf{w}$ – žinomi dydžiai, o σ ir $\mathbf{v}$ – sistemos nežinomieji. Linearizuotai sistemai pritaikytas dekompozicijos metodas, aprašytas [2]. Dekompozicija taikoma greičio atžvilgiu: $\mathbf{v} = \nabla\varphi + \mathbf{u}$. Po dekompozicijos (1.1) sistema suskyla į trijų paprastesnių uždavinių visumą. Linearizuotos sistemos (1.1) sprendinys $(\sigma, \mathbf{v})$ randamas apibrėžus tiesinį atvaizdį $\mathcal{L}$: $\tau \to \sigma$:

i) žinomam dydžiui τ sprendžiamas Noimano tipo uždavinys



1 pav. Sritis Ω.

*Darbas atliktas remiant Lietuvos valstybiniam mokslo ir studijų fondui, sutartis T-576

$$\begin{cases} \Delta_{\rho_0}\varphi = -\operatorname{div}(\tau\mathbf{w}), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \varphi(x) \to 0, & |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1.2}$$

kur $\Delta_{\rho_0} = \operatorname{div}\big(\rho_0(x)\nabla\big)$, $\rho_0 = \rho_* \exp\Phi$. Išsprendę šį uždavinį, surandame φ.

ii) sprendžiame Stokso tipo sistemą:

$$\begin{cases} -\mu_1\Delta\mathbf{u} - (\mu_1+\mu_2)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \rho_0\nabla(\Pi/\rho_0) = \mathbf{G}, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{u}) = 0, & x \in \Omega, \\ \mathbf{u} = -\nabla\varphi, & x \in \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(x) \to 0, \quad \Pi(x) \to 0, & |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1.3}$$

kur

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = {} & \mathbf{F} + (2\mu_1+\mu_2)\nabla(\rho_0^{-2}\nabla\rho_0\mathbf{w}\tau) - (2\mu_1+\mu_2)\nabla(\rho_0^{-1}\nabla\rho_0\nabla\varphi) \\ & -(2\mu_1+\mu_2)\rho_0^{-1}\nabla\rho_0\operatorname{div}\frac{\tau\mathbf{w}}{\rho_0} + (2\mu_1+\mu_2)\nabla\frac{g}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Iš (1.3) surandame$(\mathbf{u}, \Pi)$.

iii) σ randame iš transporto lygties:

$$\begin{cases} \sigma + (2\mu_1+\mu_2)\operatorname{div}\left(\dfrac{\sigma\mathbf{w}}{\rho_0}\right) = \Pi, & x \in \Omega, \\ \sigma(x) \to 0, \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{1.4}$$

Linearizuotos sistemos (1.1) sprendinys $(\mathbf{v}, \sigma)$ randamas kaip $(\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla\varphi,\ \sigma)$, kur σ – operatoriaus $\mathcal{L}$ nejudamas taškas: φ randamas iš (1.2) lygties, kur $\tau = \sigma$, $(\mathbf{u}, \Pi)$ – iš (1.3) lygties, kur $\tau = \sigma$.

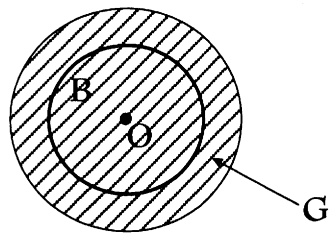
Šiame darbe pateiksime formalų (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) uždavinių aproksimacijos modelį, kuris galėtų būti realizuotas modeliuojant spūdaus klampaus skysčio tekėjimą skaitiniais metodais.

Pirmasis uždavinys, kuris kyla nagrinėjant uždavinius išorinėje srityje, tai – begalinių sričių keitimas baigtinėmis sritimis.

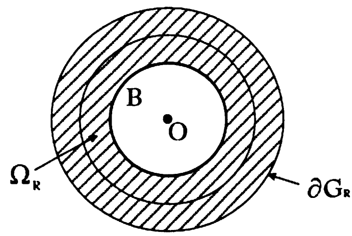
2. Srities Ω aproksimavimas

Norėdami begalinę sritį Ω pakeisti baigtine sritimi, konstruosime rutulių seką $\{G_R\}$, kur $R \to \infty$, $R \geqslant 1$. $\Omega_R = G_R \cap \Omega$ – sritis, kurioje spręsime aproksimuotą uždavinį. Kai $R \to \infty$, tai $\Omega_R \to \Omega$. Kadangi uždavinys begalybėje keičiamas uždaviniu baigtinėje srityje, tai, suprantama, kad turime suformuluoti ir papildomas kraštines sąlygas ant krašto ∂G_R, pakeisiančias sąlygas, suformuluotas begalybei. Norėdami įvertinti tokios aproksimacijos paklaidą, sprendinio ieškosime remdamiesi [3, 4] darbuose pateiktomis idėjomis. Tegul aproksimuoto uždavinio sprendinį sudaro dvi komponentės (sprendinys turi asimptotinę išraišką), kurių viena yra atitinkamai suformuluoto vidinio uždavinio srityje G, o antroji – išorinio uždavinio srityje Ω sprendinys. Sprendinį užrašysime 3 skyrelyje, o dabar pateiksime nagrinėjamas sritis.

2 pav. pavaizduota sritis G, kurioje bus nagrinėjamas vidinis uždavinys.



2 pav. Sritis G.



3 pav. Sritis Ω_R.

Jei $\xi \in G$, o $R > 1$, tai $= \xi R,\ x \in G_R$.

3 pav. pavaizduosime sritį Ω_R, kurioje nagrinėjamas aproksimuotas uždavinys. Išsiaiškinę begalinės srities Ω aproksimacijos klausimą, pereikime prie pagalbinių uždavinių aproksimacijos.

3. Formali pagalbinių uždavinių aproksimacija

Kaip jau esame minėję, šiame darbe detaliau suformuluosime (1.1) uždavinio pagalbinių uždavinių aproksimacijas.

Pirmiausia, panagrinėkime Noimano tipo uždavinio (1.2) aproksimaciją srityje Ω_R:

$$\begin{cases} -\Delta_{\rho_0}\varphi^R = \Psi, \quad x \in \Omega_R, \\ \dfrac{\partial \varphi^R}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \varphi^R = 0, \quad x \in \partial G_R. \end{cases} \tag{3.1}$$

Aproksimacijos uždavinio sprendinio ieškosime asimptotine išraiška:

$$\varphi^R \simeq \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\big(\Phi_k(\xi) + \varphi_k(x)\big), \tag{3.2}$$

kur $\varphi_0 = \frac{c_0}{2\pi|x|} + O(|x|^{-(2+\varepsilon)})$ yra tikslus (1.2) uždavinio sprendinys ([1]).

Įstatę φ_0 į (3.2), turime:

$$\varphi_0 + R^{-1}\Phi_1\Big(\frac{x}{R}\Big) = R^{-1}\Big(\frac{c_0}{2\pi\xi} + \Phi_1(\xi)\Big) + O(R^{-2}), \quad \text{kai } R \to \infty,$$

o iš (3.1) trečiosios lygties randame $\Phi_1(\xi) = -\frac{c_0}{2\pi\xi}$, $\xi \in \partial G$.

$\Phi_1(\xi)$ yra vidinio uždavinio

$$\begin{cases} -\Delta_{\rho_0}\Phi_1(\xi) = 0, & \xi \in G, \\ \Phi_1(\xi) = -\dfrac{c_0}{2\pi\xi}, & \xi \in \partial G, \end{cases} \tag{3.3}$$

sprendinys.

Nustatysime $\varphi_1(x)$. Nulio aplinkoje skleisime funkciją $\Phi_1(\xi)$ Teiloro eilute:

$$\Phi_1(\xi) = \Phi_1(0) + \mathrm{O}\big(|\xi|\big). \tag{3.4}$$

Kadangi ant srities Ω krašto $\partial\Omega$ turime Noimano tipo kraštinę sąlygą, tai randame:

$$\frac{\partial\varphi^R}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n}\Big(\varphi_0 + R^{-1}\big(\Phi_1(\xi) + \varphi_1(x)\big)\Big)\Big|_{\partial\Omega}.$$

Įstatę (3.4) į paskutiniąją lygybę, turime:

$$\frac{\partial\varphi^R}{\partial n} = 0 + \frac{\partial}{\partial n}\Big(R^{-1}\big(\Phi_1(0) + \varphi_1(x)|_{\partial\Omega}\big)\Big) + \mathrm{O}(R^{-2}). \tag{3.5}$$

Kadangi $\frac{\partial\varphi^R}{\partial n}$ turi tenkinti (3.1) antrąją lygtį, tai iš (3.5) gauname

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi_1(x) = -\frac{\partial}{\partial n}\Phi_1(0), \quad x \in \partial\Omega.$$

Taigi, $\varphi_1(x)$ yra išorinio uždavinio

$$\begin{cases} -\Delta_{\rho_0}\varphi_1(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial n} = -\dfrac{\partial\Phi_1(0)}{\partial n}, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

sprendinys ir $\varphi_1(x) \sim \mathrm{O}\big(|x|^{-1}\big)$, $|x| \to \infty$.

Tuomet formaliai:

$$\big|\varphi^R(x) - \varphi(x)\big| = \big|R^{-1}\big(\Phi_1(\xi) + \varphi_1(x)\big) + \mathrm{O}(R^{-2})\big|, \quad x \in \Omega_R.$$

Vadinasi, $\big|\varphi^R(x) - \varphi(x)\big| = \mathrm{O}(R^{-1})$, kai $R \to \infty$, $x \in \Omega$.

Pereikime prie Stokso tipo uždavinio aproksimacijos:

$$\begin{cases} -\mu_1\Delta u^R(\mu_1 + \mu_2)\nabla \operatorname{div} u^R + \rho_0\nabla(\Pi^R/\rho_0) = G, & x \in \Omega_R, \\ \operatorname{div}(\rho_0 u^R) = 0, & x \in \Omega_R, \\ u^R = -\nabla\varphi, & x \in \partial\Omega, \\ u^R = 0, & x \in \partial G_R. \end{cases} \tag{3.6}$$

Šio uždavinio sprendinio ieškome pavidalu:

$$u^R \simeq u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\Big(U_k\Big(\frac{x}{R}\Big) + u_k(x)\Big), \tag{3.7}$$

$$\Pi^R \simeq \Pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\Big(\frac{1}{R}P_k\Big(\frac{x}{R}\Big) + p_k(x)\Big), \tag{3.8}$$

kur (u_0, Π_0) – tikslus (1.3) uždavinio sprendinys srityje Ω ([1]):

$$u_0 = \mathfrak{U}(\theta) + O\big(|x|^{-1-\varepsilon}\big), \quad \Pi_0 = \pi(\theta) + O\big(|x|^{-2-\varepsilon}\big).$$

Remdamiesi analogiškais samprotavimais kaip ir Noimano tipo uždaviniui, gauname, kad

$$U_1(\xi) = -\mathfrak{U}(\theta), \quad \xi \in \partial G,$$

ir $U_1(\xi)$ yra vidinio uždavinio

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta U_1(\xi) - (\mu_1 + \mu_2)\nabla \operatorname{div} U_1(\xi) + \rho_0 \nabla(P_1/\rho_0) = \mathbf{G}, & \xi \in G, \\ \operatorname{div}\big(\rho_0 U_1(\xi)\big) = 0, \quad \xi \in G, \\ u_1(\xi) = -\mathfrak{U}(\theta), \quad \xi \in \partial G \end{cases}$$

sprendinys. $u_1(x)$ yra išorinio Stokso tipo uždavinio

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta u_1(x) - (\mu_1 + \mu_2)\nabla \operatorname{div} u_1(x) + \rho_0 \nabla(p_1(x)/\rho_0) = \mathbf{G}, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div}\big(\rho_0 u_1(x)\big) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u_1(x) = -U_1(0), \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sprendinys. Parašysime formalų aproksimacijos paklaidos įvertį:

$$|u^R(x) - u(x)| = \Big|R^{-1}\Big(U_1\Big(\frac{x}{R}\Big) + u_1(x)\Big) + O(R^{-2})\Big|, \quad x \in \Omega_R.$$

Taigi, formaliai $|u^R - u| = O(R^{-1}), x \in \Omega$.

Analogiškai galime aproksimuoti ir transporto uždavinį (1.4).

Srityje Ω_R aproksimuojame transporto uždavinį:

$$\begin{cases} \sigma^R + (2\mu_1 + \mu_2)\operatorname{div}\Big(\dfrac{\sigma^R \mathbf{w}}{\rho_0}\Big) = \Pi^R, \quad x \in \Omega_R, \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Tegul šio uždavinio sprendinio išraiška:

$$\sigma^R \simeq \sigma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\Big(\frac{1}{R}\mathcal{G}_k\Big(\frac{x}{R}\Big) + \sigma_k(x)\Big).$$

Iš [5] žinome, kad funkcijos σ ir Π turi tas pačias sferines komponentes. Todėl formaliai σ^R ieškosime pavidalu:

$$\sigma^R \simeq \Pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\Big(\frac{1}{R}P_k\Big(\frac{x}{R}\Big) + \sigma_k(x)\Big). \tag{3.10}$$

Statome (3.10) ir (3.8) į (3.9):

$$R^{-1}\sigma_1(x)+(2\mu_1+\mu_2)\,\mathrm{div}\bigg(\Big[\Pi_0+R^{-1}\Big(\frac{1}{R}P_1\Big(\frac{x}{R}\Big)+\sigma_1(x)\Big)\Big]\frac{\mathbf{w}}{\rho_0}\bigg) = R^{-1}p_1(x).$$

Tuomet σ_1 ir $\mathcal{G}_1(\xi)$ nustatome taip:

$$\sigma_1(x) + (2\mu_1 + \mu_2)\,\mathrm{div}\Big(\frac{\sigma_1(x)\mathbf{w}}{\rho_0}\Big) = p_1(x), \quad x \in \Omega,$$
$$\mathcal{G}_1(\xi) = P_1(\xi) = -\pi(\theta).$$

Formaliai įvertinkime skirtumą:

$$|\sigma^R - \sigma| = \Big|R^{-1}\Big(\frac{1}{R}\mathcal{G}_1(\xi) + \sigma_1(x)\Big) + O(R^{-2})\Big|, \quad x \in \Omega_R.$$

Turime, kad formali aproksimacijos paklaida transporto uždaviniui yra $|\sigma^R - \sigma| = O(R^{-1})$. Taigi, visų trijų pagalbinių uždavinių aproksimacijos paklaida yra $O(R^{-1})$ eilės.

4. Formali linearizuotos sistemos aproksimacija

Kai jau esame išsprendę visus tris pagalbinius uždavinius, pagal dekompozicijos metodo apibrėžimą, remdamiesi tiesiniu atvaizdžiu $\mathcal{L}$: $\tau^R \to \sigma^R$, galime sukonstruoti formalų linearizuotos sistemos sprendinį (v^R, σ^R) ir formaliai įvertinti tokios aproksimacijos paklaidą.

Glaustai pateiksime aproksimuoto linearizuoto uždavinio sprendinio paieškos algoritmą:

i) pasirenkame τ_0^R,
ii) sprendžiame Noimano tipo uždavinį ir nustatome φ_0^R,
iii) sprendžiame Stokso tipo uždavinį ir sužinome (u_0^R, Π_0^R),
iv) iš transporto lygties randame σ_0^R.

Tuomet, tarę, kad $\tau_1^R = \sigma_0^R$, vėl kartojame ii)–iv) žingsnius, nustatome σ_1^R ir t.t. Iš [1] žinome, kad $\mathcal{L}$ – sutraukiantis atvaizdis specialiose svorinėse erdvėse su atitinkamai apibrėžta norma $\|\cdot\|$. Tuomet σ^R, kuris turi (3.10) išraišką, yra operatoriaus $\mathcal{L}$ nejudamas taškas, t.y., σ^R ir atitinkami u^R, φ^R bus linearizuoto uždavinio sprendinys (v^R, σ^R), kur $v^R = u^R + \nabla\varphi^R$. Todėl procesą galima tęsti tol, kol pasiekiame norimą tikslumą.

Vadinasi, kiekvienoje srityje Ω_R gauname seką:

$$\sigma_0^R \to \sigma_1^R \to \ldots \to \sigma_n^R.$$

Pereikime prie prie algoritmo paklaidos įverčio.

Jau žinome, kad Noimano tipo, Stokso tipo ir transporto lygties aproksimacijos uždavinius galime išspręsti darydami $O(R^{-1})$ eilės paklaidą.

Formaliai įvertinsime linearizuoto uždavinio sprendinio paklaidą $\|v-v^R\|+\|\sigma-\sigma^R\|$.

Kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, kad

$$\begin{aligned} \|v - v^R\| &\leqslant \|v - v_n\| + \|v_n - v_n^R\| + \|v_n^R - v^R\| \leqslant 2\varepsilon + \|v_n - v_n^R\| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |u_n - u_n^R| + |\nabla\varphi_n - \nabla\varphi_n^R| + |\sigma_n - \sigma_n^R|, \end{aligned}$$

kur $\{v_n\}$ – teoriškai gaunamų sprendinių seka srityje Ω ([1]), o $\{v_n^R\}$ – formalių aproksimacijų seka srityje Ω_R. $v_n = \nabla\varphi_n + u_n$, o $v_n^R = \nabla\varphi_n^R + u_n^R$.

Naudodami formalius pagalbinių uždavinių įverčius, gauname

$$\|v - v^R\| \leqslant 2\varepsilon + O(R^{-1}).$$

Todėl pakankamai mažiems ε:

$$\|v - v^R\| \simeq O(R^{-1}).$$

Literatūra

[1] T. Leonavičienė, K. Pileckas, Asymptotic behaviour at infinity of exterior three-dimensional steady compressible flow, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, (2002) (to appear).

[2] A. Matsumura and T. Nishida, Initial boundary value problems for equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, *Comm. Math. Phys.*, **89**, 445–464 (1983).

[3] S.A. Nazarov and M. Specovius-Neugebauer, Approximation of exterior problems. Optimal conditions for the Laplacian, *Analysis*, **16**, 305–324 (1996).

[4] S.A. Nazarov and M. Specovius-Neugebauer, Approximation of exterior boundary value problems for the Stokes system, *Asymptotic Anal.*, **14**, 233–255 (1997).

[5] S.A. Nazarov, A. Sequeira and J.H. Videman, Asymptotic behaviour at infinity of three-dimensional steady viscoelastic flows, *Pacific J. of Math.* (2002) (to appear).

The approximation problems of solutions of the compressible fluid flow in an exterior domain

T. Leonavičienė

The approximation of solutions of the three-dimensional steady compressible flow (linearized problem) in an exterior domain is studied. The formal error estimates are obtained.