Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 697–700

Apie Wang charakterizacijos stabilumo įvertį

Romanas JANUŠKEVIČIUS (VPU, MII)
el. paštas: romjan@takas.lt

Tarkime, kad neneigiamas atsitiktinis dydis Z turi Weibull skirstinį:

$$P\,(Z < x) = 1 - \exp(-\lambda x^{\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0, \quad x \geqslant 0.$$

Pasinaudojus sąlyginės tikimybės apibrėžimu lengva įsitikinti, kad šis skirstinys tenkina sekantį sąryšį, kuris dar vadinamas veiksmo be praeities poveikio savybe eilės α:

$$P\left(Z \geqslant \sqrt[\alpha]{x^{\alpha} + y^{\alpha}} \mid Z \geqslant y\right) = P\,(Z \geqslant x) \quad \forall x, y \geqslant 0. \tag{1}$$

Ar ši Weibull skirstinių klasė yra vienintelė klasė, kurios elementai turi šią savybę? Priminsime, kad teoremos, kuriose aprašoma (charakterizuojama) skirstinių klasė nagrinėjamų atsitiktinių dydžių ar jų funkcijų savybėmis yra vadinamos charakterizacijos teoremomis.

Weibull skirstinių klasės charakterizacija detaliai išnagrinėta Y.H. Wang darbe [1].

1 teorema (Y.H. Wang [1]). *Tegu Z – neneigiamas neišsigimęs atsitiktinis dydis ir $\alpha > 0$. Šis Z turi Weibull skirstinį tada ir tik tada, kai tenkinamas sąryšis* (1).

Pastebėsime, kad atsitiktinio dydžio Z neneigiamumo sąlygos šioje teoremoje galima atsisakyti. Iš tiesų, kadangi (1) yra teisinga visiems $x \geqslant 0$ ir visiems $y \geqslant 0$, tai ji teisinga ir taške $x = y = 0$. Kadangi sąlyginė tikimybė šiame taške turi egzistuoti, tai $P\,(Z \geqslant 0) > 0$ ir iš (1) gauname, kad tuo pačiu metu

$$P\,(Z \geqslant 0) = P\,(Z \geqslant 0)\,P\,(Z \geqslant 0) = P^2\,(Z \geqslant 0)\,.$$

Tačiau tai įmanoma tik tada, kai $P\,(Z \geqslant 0) = 1$, ką ir reikėjo įrodyti. Beje, galėjome samprotauti ir kitaip. Iš tiesų, kadangi bet kuriam atsitiktiniam įvykiui A, tenkinančiam sąlygą $P\,(A) > 0$, visada $P\,(A|A) = 1$, tai iš (1) iškart gauname, kad $1 = P\,(Z \geqslant 0)$.

Jei teoremos sąlygos išpildomos ne tiksliai, o tik su tam tikra paklaida ε, tai ar galima tvirtinti, kad teoremos išvados išpildomos su tam tikra paklaida $\delta\,(\varepsilon)$, kur

$$\delta\,(\varepsilon) \downarrow 0, \quad \text{kai} \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Teoremos, kuriose nagrinėjamos tokio pobūdžio problemos, vadinamos stabilumo teoremomis.

Išnagrinėsime Wang teoremos stabilumą be reikalavimo, kad nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai būtų neneigiami.

2 teorema. *Tegu* $\alpha > 0$, *o atsitiktinis dydis* X *visiems* $x \geqslant 0$ *ir visiems* $y \geqslant 0$ *tenkina sąlygą*

$$P\left(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha} \mid X \geqslant y\right) = P(X \geqslant x) + r(x,y), \quad |r(x,y)| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Tada atsitiktinis dydis X *yra beveik neneigiamas šia prasme:*

$$P(X \geqslant 0) \geqslant 1 - \varepsilon \tag{3}$$

ir egzistuoja $\lambda > 0$ *ir* $C \leqslant 2$ *tokios, kad*

$$|P(X \geqslant x) - \exp(-\lambda x^\alpha)| \leqslant C\varepsilon, \quad \forall x \geqslant 0. \tag{4}$$

Įrodymas. Kadangi reikalaujama, kad (2) būtų išpildoma $\forall y \geqslant 0$, tai iš čia gauname, kad

$$P\left(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha}\right) = P(X \geqslant x)\, P(X \geqslant y) + R(x,y), \quad \forall x \geqslant 0, \quad \forall y \geqslant 0, \tag{5}$$

kur $R(x,y) = r(x,y)\, P(X \geqslant y)$.

Paėmę $x = y = 0$, iš (5) gauname, kad

$$P^2(X \geqslant 0) \geqslant (1 - \varepsilon)\, P(X \geqslant 0). \tag{6}$$

Pagal (2) sąryšį, sąlyginė tikimybė taške $y = 0$ egzistuoja, todėl $P(X \geqslant 0) > 0$ ir iš (6) gauname, kad

$$P(X \geqslant 0) \geqslant 1 - \varepsilon,$$

t.y., (3) įvertis yra įrodytas.

Pažymėkime

$$P(X \geqslant x) = P(X \geqslant x \cap X \geqslant 0) + r_1(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{7}$$

Nesunkiai gauname, kad $\forall x \geqslant 0$

$$r_1(x) = P(X \geqslant x \cap X < 0) = 0. \tag{8}$$

Įstatę (7) į (5) formulę turime:

$$\begin{aligned} &P\left(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha} \cap X \geqslant 0\right) + r_1\left(\sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha}\right) \\ &\quad = \left(P(X \geqslant x \cap X \geqslant 0) + r_1(x)\right)\left(P(X \geqslant y \cap X \geqslant 0) + r_1(y)\right) + R(x,y), \\ &\quad \forall x \geqslant 0, \quad \forall y \geqslant 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Pastebime, kad atsitiktinis dydis X nėra neneigiamas, todėl egzistuoja tokie teigiami α ir x, kad $P(X^\alpha \geqslant x^\alpha) \neq P(X \geqslant x)$. Pavyzdžiui, $P\left(X^2 \geqslant 1\right) \neq P\left(X \geqslant 1\right)$. Tačiau, akivaizdu, $\forall \alpha > 0$ ir $\forall x \geqslant 0$

$$P\left(X^\alpha \geqslant x^\alpha \cap X \geqslant 0\right) = P\left(X \geqslant x \cap X \geqslant 0\right).$$

Todėl iš (9) išplaukia, kad

$$\begin{aligned} & G\left(x^\alpha + y^\alpha\right) + r_1\left(\sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha}\right) \\ & = \left(G\left(x^\alpha\right) + r_1(x)\right) \cdot \left(G\left(y^\alpha\right) + r_1(y)\right) + R(x, y), \quad \forall x \geqslant 0, \quad \forall y \geqslant 0, \end{aligned} \tag{10}$$

kur

$$G(x) = P\left(X^\alpha \geqslant x \cap X \geqslant 0\right).$$

Pažymėję $u = x^\alpha$, $v = y^\alpha$ iš (8) ir (10) nesunkiai gauname, kad

$$G(u+v) = G(u)\,G(v) + r_2(u,v), \quad \forall u \geqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} |r_2(u,v)| = & \Big| r_1\left(\sqrt[\alpha]{u}\right) G(v) + r_1\left(\sqrt[\alpha]{v}\right) G(u) \\ & + r_1\left(\sqrt[\alpha]{u}\right) r_1\left(\sqrt[\alpha]{v}\right) - r_1\left(\sqrt[\alpha]{u+v}\right) + R\left(\sqrt[\alpha]{u}, \sqrt[\alpha]{v}\right) \Big| \\ \leqslant & \; \varepsilon G(v). \end{aligned} \tag{12}$$

(11) sąryšis – tai nehomogeninė Cauchy funkcionalinė lygtis, detaliai išnagrinėta autoriaus darbe [2]. Monografijoje [3] ji suvedama į sąsūkos lygtį, o monografijoje [4] – į diferencialinę lygtį. Iš šių darbų ir įverčio (12) nesunkiai gauname, kad

$$\left|G(u) - \exp(-\lambda u)\right| \leqslant C\varepsilon, \quad \forall u \geqslant 0,$$

ir, be to, konstantą C iš viršaus galima įvertinti taip: $C \leqslant 2$.

O iš čia išplaukia, kad

$$\begin{aligned} & P\left(X^\alpha \geqslant u \cap X \geqslant 0\right) = \exp(-\lambda u) + r_3(u), \\ & |r_3(u)| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall u \geqslant 0. \end{aligned}$$

Dabar belieka pastebėti, kad $\forall x \geqslant 0$

$$\exp\left(-\lambda x^\alpha\right) + r_3\left(x^\alpha\right) = P\left(X^\alpha \geqslant x^\alpha \cap X \geqslant 0\right) = P\left(X \geqslant x\right).$$

Tai reiškia, kad $\forall x \geqslant 0$

$$\left|P(X \geqslant x) - \exp\left(-\lambda x^\alpha\right)\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

t.y., (4) įvertis ir pati 2 teorema yra įrodyti.

Literatūra

[1] Y.H. Wang, A functional equation and its application to the characterizations of the Weibull and stable distributions, *J. Appl. Prob.*, **13**, 385–391 (1976).
[2] R. Yanushkevichius, Stability of characterizations of the exponential law, *J. Math. Sci.*, **76**(1), 2214–2220 (1995).
[3] R. Yanushkevichius, *Stability of characterizations of Probability Distributions*, Mokslas, Vilnius (1991) (in Russian).
[4] T.A. Azlarov and N.A. Volodin, *Characterization Problems Connected with the Exponential Distribution*, Fan, Tashkent (1982) (in Russian).

On the stability estimation of Wang's characterization theorem

R. Januškevičius

An important and useful characterization of the Weibull distribution is its lack of memory (of order α) property, i.e., $P\,(X \geqslant \sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha}|X \geqslant y) = P\,(X \geqslant x)$ for all $x, y \geqslant 0$. The technique commonly employed in proving this characterization is the well-known Cauchy functional equation $\phi\,(\sqrt[\alpha]{x^\alpha + y^\alpha}) = \phi\,(x)\,\phi\,(y)$. The stability estimation in this characterization of the Weibull distribution is analysied.