Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 591–596

Optimalus lėšų, skirtų darbų saugos priemonėms, paskirstymas naudojant stochastinį programavimą

Sigutė VAKRINIENĖ, Petras ČYRAS (VGTU)
el. paštas: petras.cyras@st.vtu.lt, sigute@micro.lt

Straipsnyje [1] siūloma metodika traumų prevencijos priemonių efektyvumui palyginti ir optimalumo kriterijus lėšoms, skirtoms traumų prevencijai, paskirstyti. Matricinis lošimas, kurio matricos elementai yra vidutinis skaičius traumų, įvykstančių dėl vienokių ar kitokių saugos priemonių nebuvimo ir darbuotojų klaidų, naudojamas kaip šių problemų matematinis modelis.

Duomenų apie nelaimingus atsitikimus įmonėse ir organizacijose analizė leidžia išskirti keletą svarbių priežasčių, kurios dažnai veda prie gamybinio traumatizmo ar sunkaus sužalojimo atvejų. Tokios priežastys yra netinkamas darbo organizavimas, nepakankama priežiūra, darbo vietos, darbo aplinkos, teritorijos neatitikimas norminių aktų reikalavimams, netvarkingi įreginiai ir mechanizmai, nepakankamas mokymas ir instruktavimas, specialios įrangos nebuvimas ir t.t. Toliau tokių priežasčių pašalinimą vadinsime 1-ąja, 2-ąja, $\ldots$, i-tąja, $\ldots$, m-tąja traumų prevencijos priemonėmis.

Tarkime, kad $\bar{b}_i$ yra vidutinis (per laiko vienetą) i-tosios nuo darbdavių priklausančios priežasties sąlygotas traumų skaičius, kuriuo, pilnai atlikus i-tąją prevencijos priemonę, galima sumažinti bendrą traumų skaičių.

Asmenines, nuo darbuotojų priklausančias traumų priežastis, tokias kaip technologinio proceso reikalavimų nesilaikymas, nesinaudojimas saugos priemonėmis, neblaivumas ir kitas vadinsime 1-ju, 2-ju, $\ldots$, j-ju, $\ldots$, n-ju darbo drausmės pažeidimais.

Tegul $\bar{d}_{ij}$ yra dalis j-tojo darbo drausmės pažeidimo sąlygoto vidutinio traumų skaičiaus, kurio galima išvengti pilnai pašalinus i-tąją priežastį iš darbdavio pusės. Pavyzdžiui, pakankama priežiūra gali tam tikru dydžiu sumažinti skaičių traumų, susijusių su technologinio proceso pažeidimais.

Dydžiai $\bar{a}_{ij} = \bar{b}_i + \bar{d}_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, yra matricinio lošimo matricos $\|\bar{a}_{ij}\|$ elementai

$$\begin{Vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \ldots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \ldots & \bar{a}_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Matricinio lošimo $\|\bar{a}_{ij}\|$ pirmojo „lošėjo“ (t.y., darbdavio) optimali gryna strategija (t.y., vienos konkrečios prevencijos priemonės pasirinkimas) arba mišri (t.y., dalinis kelių konkrečių prevencijos priemonių vykdymas) strategija garantuoja, kad nepriklausomai nuo darbuotojų pažeidimų bus išvengta vidutiniškai V_0 traumų (per laiko vienetą). Čia V_0 yra matricinio lošimo vertė, gaunama išsprendus tiesinio programavimo uždavinį:

$$\max V$$
$$\sum_{i=1}^{m} \overline{a}_{ij}x_i \geqslant V, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Šio uždavinio sprendinys $X_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ yra optimali darbdavio strategija, o V_0 – optimali tikslo funkcijos reikšmė ($\max V = V_0$).

Tvirtinimas, kad bus išvengta vidutiniškai V_0 traumų, remiasi prielaida, kad sumažinus dalį traumas sąlygojančios priežasties, proporcingai sumažės šios priežastes iššaukiamų traumų skaičius.

Žodis „vidutiniškai“ reiškia, kad išvengtų traumų skaičius gali būti ir mažesnis už skaičių V_0 (didesnis taip pat). Net jeigu dydžiai $\overline{a}_{ij}$ (per laiko vienetą, pavyzdžiui, metus, įvykstančių traumų, susijusių su i-tąja priežastimi iš darbdavio pusės ir j-tuoju darbuotojo pažeidimu,vidutinis skaičius) gaunami remiantis daugelio metų statistiniais duomenimis apie traumas ir jų priežastis, jų negalima laikyti pilnai determinuotais. Todėl verta nagrinėti [1] straipsnyje rekomenduotų matematinių metodų ir gautų rezultatų patikimumą.

Kad su tam tikra tikimybe α^n galėtume teigti, jog, optimaliai pasirinkus prevencijos priemonę, išvengtų traumų skaičius bus nemažesnis už konkretų dydį, reikia spręsti stochastinio programavimo uždavinį:

$$\max V$$
$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geqslant V\right) \geqslant \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Čia a_{ij} yra atsitiktinis dydis – skaičius traumų per laiko vienetą, susijusių su i-ja priežastimi iš darbdavio pusės ir j-tuoju darbuotojo pažeidimu. Traumų skaičių per laiko vienetą galima laikyti Puasono atsitiktiniu dydžiu, nes progų įvykti traumoms yra daug, o įvyksta jos (ypač sunkios ir mirtinos) gana retai. Atsitiktiniai dydžiai a_{ij} $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, yra nepriklausomi. Taigi prileidžiame, kad atsitiktiniai dydžiai a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, yra pasiskirstę pagal Puasono dėsnį su vidurkiais $\overline{a}_{ij}$. Atsitiktinių dydžių $x_i a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, skaitinės charakteristikos: $\mathrm{M}(x_i \cdot a_{ij}) = x_i\overline{a}_{ij}$, $\mathrm{D}(x_i \cdot a_{ij}) = x_i^2\overline{a}_{ij}$ ir $\sigma(x_i \cdot a_{ij}) = x_i\sqrt{\overline{a}_{ij}}$. Nesunku, naudojant charakteringąją funkciją, parodyti, kad, kai $\overline{a}_{ij} \to \infty$, atsitiktinio dydžio

$$\frac{x_i a_{ij} - x_i\overline{a}_{ij}}{x_i\sqrt{\overline{a}_{ij}}} = \frac{a_{ij} - \overline{a}_{ij}}{\sqrt{\overline{a}_{ij}}}$$

pasiskirstymas artėja prie normaliojo su vidurkiu 0 ir vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu 1. Todėl atsitiktinio dydžio $x_i a_{ij}$ pasiskirstymas artės prie normaliojo su vidurkiu $x_i \overline{a}_{ij}$ ir vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu $x_i \sqrt{\overline{a}_{ij}}$.

Atsitiktinio dydžio $x_k a_{kj}$ charakteringoji funkcija visiems $k = 1, 2, \ldots, m$ yra

$$\varphi_k(t) = \exp\left\{\overline{a}_{kj}\left(\exp\{x_k ti\} - 1\right)\right\}.$$

Todėl sumos $\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj}$ charakteringoji funkcija bus

$$\begin{aligned}\varphi_\Sigma(t) &= \exp\left\{\overline{a}_{1j}\left(\exp\{x_1 ti\} - 1\right)\right\}\exp\left\{\overline{a}_{2j}\left(\exp\{x_2 ti\} - 1\right)\right\}\ \ldots\\ &\quad \times \exp\left\{\overline{a}_{mj}\left(\exp\{x_m ti\} - 1\right)\right\}.\end{aligned}$$

Kai $\overline{a}_{kj} \to \infty$, kiekvienas dauginamasis $\varphi_k(t) = \exp\{\overline{a}_{kj}(\exp\{x_k ti\} - 1)\}$ artėja prie skirstinio $\mathrm{N}(x_k \overline{a}_{kj}, x_k \sqrt{\overline{a}_{kj}})$ charakteringosios funkcijos

$$\exp\left\{x_k \overline{a}_{kj} ti - \frac{x_k^2 \overline{a}_{kj} t^2}{2}\right\}.$$

Tada charakteringosios funkcijos $\varphi_\Sigma(t)$ riba, kai $\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{a}_{kj} \to \infty$, bus

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{a}_{kj} ti - \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 \overline{a}_{kj} t^2}{2}\right\}.$$

Todėl galime tvirtinti, jog sumos $\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj}$ pasiskirstymas, kai $\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{a}_{kj} \to \infty$, artėja prie normaliojo su vidurkiu $\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{a}_{kj}$ ir vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu $\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \overline{a}_{kj}}$.

Taigi nepriklausomų atsitiktinių dydžių $x_i a_{ij}$ sumos $\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj}$ pasiskirstymą aproksimuosime skirstiniu $\mathrm{N}(\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{a}_{kj}, \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \overline{a}_{kj}})$.

Stochastinio uždavinio apribojimus

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant V\right) \geqslant \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

pakeisime ekvivalenčiais:

$$1 - \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leqslant V\right) \geqslant \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leqslant V\right) \leq 1 - \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\phi\left(\frac{V - \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{a}_{ij} x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{a}_{ij} x_i^2}}\right) \leqslant 1 - \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{V-\sum\limits_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}x_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}x_i^2}} \leqslant -u_\alpha, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}x_i - u_\alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}x_i^2} \geqslant V, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

čia simboliu u_α pažymėtas normaliojo standartizuoto skirstinio α lygmens kvantilis.

Įvedę naujus kintamuosius $z_j, j=1,2,\ldots,n$

$$z_j^2 = \sum \overline{a}_{ij}x_j^2, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

gauname stochastinio programavimo uždaviniui ekvivalentų separabelinio programavimo uždavinį

$$\begin{aligned}
&\max V\\
&\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}x_i - u_\alpha z_j \geqslant V, \quad j=1,2,\ldots,n,\\
&z_j^2 = \sum \overline{a}_{ij}x_j^2, \quad j=1,2,\ldots,n,\\
&\sum_{i=1}^{m}x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,m.
\end{aligned}$$

Jeigu darbdavys traumų prevencijos priemones pasirenka pagal separabelinio uždavinio optimalų sprendinį $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1})$, tai su tikimybe α^n galime laukti, kad bus išvengta nemažiau, kaip V_1 traumų, čia V_1 – optimali šio uždavinio tikslo funkcijos reikšmė.

Sudaryto separabelinio netiesinio programavimo uždavinio sprendinys nurodo, kuri traumų prevencijos priemonė yra efektyviausia, tačiau ši priemonė gali būti per daug brangi, todėl turime žinoti, kokia yra kiekvienos traumatizmo priežasties pašalinimo kaina.

Optimalų traumų prevencijai skirtų lėšų paskirstymą gausime modifikuodami sudarytus uždavinius.

Tarkime, $\overline{c}_i$ yra vidutinis kiekis piniginių lėšų, reikalingų i-tąjai traumų priežasčiai pilnai pašalinti ($i=1,2,\ldots,m$). Kai turimos lėšos C, optimalų jų paskirstymą gautume išsprendę modifikuotą uždavinį:

$$\begin{aligned}
&\max V\\
&\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}x_i - u_\alpha z_j \geqslant V, \quad j=1,2,\ldots,n,\\
&z_j^2 = \sum \overline{a}_{ij}x_j^2, \quad j=1,2,\ldots,n,
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i x_i \leqslant C,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Tegul prevencijos priemonėms pilnai įvykdyti reikalingi lėšų kiekiai c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, yra nepriklausomi normalieji atsitiktiniai dydžiai su vidurkiais $\bar{c}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, ir vidutiniais kvadratiniais nuokrypiais σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Tada suma $\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i$ bus pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį su vidurkiu $\sum_{i=1} m \bar{c}_i x_i x_i$ ir vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i^2}$, todėl modifikuotam stochastinio programavimo uždaviniui

$$\max V$$
$$\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant V\Big) \geqslant \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \leqslant C\Big) \geqslant \alpha, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

bus ekvivalentus toks separabelinio programavimo uždavinys:

$$\max V$$
$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{ij} x_i - u_\alpha z_j \geqslant V, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$z_j^2 = \sum \bar{a}_{ij} x_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i x_i + u_{1-\alpha} y \leqslant C,$$
$$y^2 = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i^2, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Jeigu vidutiniai kvadratiniai nuokrypiai σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ nėra žinomi, šį uždavinį galima spręsti pasirenkant įvairias atsitiktinių dydžių c_i variacijos koeficientų $v_i = \frac{\sigma_i}{\bar{a}_i}$ reikšmes.

Optimali tikslo funkcijos reikšmė V_2 yra skaičius traumų, kurių su tikimybe nemažesne negu α^n išvengsime, jeigu turimas lėšas C traumų prevencijai paskirstysime pagal separabelinio uždavinio sprendinį $X_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{m2})$, čia sprendinio komponentė x_{i2} parodo, kokia sumos $\bar{c}_i$ dalis turi būti skiriama i-tąjai prevencijos priemonei. Su tikimybe α galime tvirtinti, kad turimų lėšų C pakaks numatytam traumų prevencijos planui įvykdyti.

Keisdami tikimybę α, variacijos koeficientus v_i ir turimas lėšas C, galime atlikti įvairią optimalių sprendinių analizę. Ištirti, pavyzdžiui, kaip kinta optimalus lėšų paskirstymas, norint didesnio patikimumo (didinant α) arba esant didesniam neapibrėžtumui (didinant v_i). Pavyzdžių sprendimas parodo, kad abiem šiais atvejais optimalu lėšas traumų prevencijai skirstyti tolygiau.

Literatūra

[1] P. Čyras, S. Vakrinienė, Investigation of the efficiency of labour safety means by statistical games, *Journal of Civil Engineering and Management*, Vol. VIII, **2** (2002).
[2] J. Kubilius, *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, Mokslas, Vilnius (1980).
[3] J. Kruopis, *Matematinė statistika*, Mokslas, Vilnius (1977).

Optimal allocation of means for trauma prevention using stochastic programming

S. Vakrinienė, P. Čyras

Optimal criterion for allocation of means necessary for trauma prevention is proposed. The problem is simulated as a matrix game with random elements.