Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
**64** tomas, 2023, 23–29
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33586

# Apie sveikųjų skaičių sekų, asocijuotų su pirminiais dvyniais, apskaičiavimą

**Igoris Belovas, Martynas Sabaliauskas, Paulius Mykolaitis**

*Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
El. paštas: Igoris.Belovas@mif.vu.lt; Martynas.Sabaliauskas@mif.vu.lt
El. paštas: Paulius.Mykolaitis@mif.stud.vu.lt

Įteiktas 2023 birželio 26; publikuotas 2023 lapkričio 20

**Santrauka.** Pirminių dvynių hipotezė teigia, kad egzistuoja be galo daug pirminių skaičių porų, kurių nariai tarpusavyje skiriasi 2. Nagrinėjant šią hipotezę, buvo gauta daug svarbių rezultatų, tačiau problema taip ir liko neišspręsta. Šiame darbe pirminių dvynių problema nagrinėjama iš eksperimentinės matematikos pusės. Taikant tikimybinį Milerio-Rabino pirminio skaičiaus testą ir lygiagrečiųjų skaičiavimų technologijas, yra eksperimentiškai tiriamas pirminių dvynių bei pirminių porų pasiskirstymas intervaluose $(2^n; 2^{n+1}]$.

**Raktiniai žodžiai:** sveikaskaitės sekos; Hardžio-Litlvudo hipotezė; pirminiai $k$-rinkiniai

**AMS:** 11A41, 11N05, 11Y55

## 1 Įvadas

Vienas garsiausių iš neišspręstų matematikos uždavinių (po Rymano hipotezės ir jau įrodytos Ferma teoremos) yra pirminių dvynių problema. Stebina paradoksalus kontrastas tarp elementarios formuluotės, ir giliaus, jau šimtmečius nepasiduodančio matematikų pastangoms, turinio. Pirminiai dvyniai (angl. *twin primes*) yra pirminių skaičių poros, kurių skirtumas lygus 2:

$$(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73), \ \dots .$$

**1 teiginys [*Pirminių dvynių problema*].** *Pirminių dvynių yra be galo daug.*

Teiginys nėra įrodytas, tačiau tvirtai manoma, kad jis yra teisingas. Hardis ir Litlvudas 1923 metais iškėlė hipotezę apie pirminių porų asimptotinį tankį (pagal 1849 metų Polinjako hipotezę, tokių porų yra be galo daug). Atvejis $d = 2$ yra pirminių dvynių problema (žr. 1 teiginys), $d = 4$ atitinka pirminių pusbrolių problemą, $d = 6$ yra seksualiųjų pirminių (angl. *sexy primes*) problema. Optimistiškiausia (uodegos atžvilgiu) hipotezės formuluotė yra tokia [2, 4].

**2 teiginys [*Pirmoji Hardžio–Litlvudo hipotezė pirminėms poroms*].** *Jei $\pi_d(x)$, yra pirminių porų skaičiuojančioji funkcija, ir $d = 2n$, tai*

$$\pi_d(x) = \#\{p \leqslant x \mid p,\, p+d \in \mathbb{P}\} = 2C_2 R_d \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} + O\big(x^{1/2+\varepsilon}\big), \tag{1}$$

*kur $\varepsilon$ yra mažas teigiamas skaičius ir $C_2$ yra pirminių dvynių konstanta,*

$$\begin{aligned} C_2 &= \prod_{p\geqslant 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0.6601618158\ldots, \\ R_d &= \prod_{p\mid d,\, p\geqslant 3} \frac{p-1}{p-2} = \prod_{p\mid d,\, p\geqslant 3}\left(1 + \frac{1}{p-2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

*Galima pastebėti, kad $R_d$ įgyja mažiausias reikšmes su $d = 2^n$ ir $R_{2^n} = 1$. Be to, $R_{2p} = 1 + O(1/p)$, kai $p \to \infty$.*

**1 lentelė.** $R_d$ reikšmės.

| $d$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_d$ | 1 | 1 | 2 | 1 | $\frac{4}{3}$ | 2 | $\frac{6}{5}$ | 1 | 2 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{10}{9}$ | 2 | $\frac{12}{11}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{8}{3}$ |

Sena problema išlieka aktuali ir šiandien. Kasmet pasirodo jos, arba jos apibendrinimų, analiziniai [5, 1, 2] arba skaitiniai [6, 8] tyrimai.

2013 m. Itanas Žanas paskelbė, o 2014 m. publikavo įrodymą, kad yra be galo daug pirminių porų, besiskiriančių $\Delta \leqslant 7 \cdot 10^7$ [9]. Šis svarbus rezultatas (paremtas Goldstono, Pinco ir Yldyrymo atradimais [3]) buvo intensyviai gerinamas, kol skirtumas $\Delta$ nesumažėjo iki 246 [7].

Toliau straipsnyje kaip $\mathrm{Li}_m(x)$ žymėsime $m$-ąjį pastumtąjį logaritminį integralą,

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_m(x) &= \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^m} \\ &= \frac{x}{(\log x)^m} + \frac{mx}{(\log x)^{m+1}} + \frac{m(m+1)x}{(\log x)^{m+2}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+3}}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Visos ribos straipsnyje, jei nepažymėta kitaip, skaičiuojamos kai $x \to \infty$.

## 2 Sekos, asocijuotos su pirminėmis poromis

Apibrėžkime sveikųjų skaičių sekas $\{b_{n,d}\}$,

$$b_{n,d} = \#\big\{2^n < p \leqslant 2^{n+1} \mid p,\, p+d \in \mathbb{P}\big\}, \quad n \in \mathbb{N},\ d \in 2\mathbb{N}. \tag{4}$$

**2 lentelė.** Pirminių skaičių porų $(p, p+d)$ kiekis $b_{n,d}$ intervaluose $(2^n, 2^{n+1}]$.

| $n$ | $b_{n,2}$ | $b_{n,4}$ | $b_{n,6}$ | $b_{n,8}$ | $b_{n,10}$ | $b_{n,12}$ | $b_{n,14}$ | $b_{n,16}$ | $b_{n,18}$ | $b_{n,20}$ | $b_{n,22}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| 5 | 2 | 2 | 5 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 |
| 6 | 3 | 6 | 7 | 3 | 5 | 6 | 3 | 3 | 6 | 3 | 4 |
| 7 | 7 | 4 | 11 | 5 | 7 | 12 | 6 | 7 | 13 | 6 | 5 |
| 8 | 7 | 11 | 17 | 9 | 13 | 19 | 12 | 8 | 16 | 15 | 12 |
| 9 | 12 | 15 | 28 | 15 | 20 | 25 | 20 | 15 | 31 | 18 | 16 |
| 10 | 26 | 23 | 55 | 25 | 34 | 52 | 27 | 22 | 45 | 36 | 24 |
| 11 | 45 | 44 | 79 | 46 | 52 | 83 | 55 | 41 | 86 | 51 | 48 |
| 12 | 70 | 64 | 142 | 72 | 95 | 140 | 82 | 69 | 143 | 91 | 78 |
| 13 | 113 | 131 | 241 | 121 | 156 | 239 | 154 | 114 | 240 | 162 | 137 |
| 14 | 215 | 197 | 434 | 208 | 262 | 419 | 254 | 204 | 430 | 287 | 228 |
| 15 | 355 | 359 | 719 | 382 | 502 | 703 | 448 | 389 | 735 | 475 | 411 |
| 16 | 666 | 658 | 1291 | 670 | 882 | 1341 | 787 | 647 | 1328 | 891 | 718 |
| 17 | 1153 | 1160 | 2319 | 1147 | 1551 | 2281 | 1434 | 1152 | 2335 | 1538 | 1283 |
| 18 | 2071 | 2071 | 4171 | 2109 | 2779 | 4199 | 2516 | 2140 | 4183 | 2817 | 2358 |
| 19 | 3785 | 3751 | 7538 | 3769 | 5017 | 7527 | 4460 | 3729 | 7519 | 5045 | 4196 |
| 20 | 6965 | 6820 | 13569 | 6852 | 9056 | 13672 | 8079 | 6783 | 13631 | 9100 | 7537 |
| 21 | 12495 | 12445 | 24824 | 12330 | 16557 | 24797 | 15000 | 12426 | 24928 | 16529 | 13736 |
| 22 | 22643 | 22561 | 45263 | 22662 | 30109 | 45448 | 27139 | 22617 | 45278 | 30183 | 25285 |
| 23 | 41608 | 41670 | 82579 | 41560 | 55589 | 83020 | 49934 | 41379 | 83092 | 55191 | 46063 |
| 24 | 76371 | 76289 | 152839 | 76478 | 101934 | 153027 | 91611 | 76904 | 152681 | 101941 | 84865 |
| 25 | 140944 | 141009 | 282165 | 141137 | 188038 | 282240 | 169200 | 141456 | 282763 | 187903 | 157508 |
| 26 | 261752 | 262183 | 523710 | 260812 | 348827 | 522980 | 314412 | 261728 | 523025 | 348381 | 290062 |
| 27 | 484968 | 485670 | 970747 | 485437 | 647404 | 971623 | 583552 | 485841 | 971779 | 647768 | 539580 |
| 28 | 904799 | 904901 | 1808934 | 905334 | 1206741 | 1808855 | 1085042 | 905817 | 1808858 | 1206858 | 1005968 |
| 29 | 1689477 | 1688468 | 3378523 | 1690975 | 2253636 | 3377319 | 2025294 | 1689570 | 3378176 | 2250914 | 1876173 |
| 30 | 3160113 | 3159596 | 6318344 | 3159014 | 4215979 | 6321921 | 3793446 | 3160751 | 6321042 | 4215989 | 3512489 |
| 31 | 5928904 | 5930172 | 11857968 | 5929599 | 7899095 | 11858736 | 7112399 | 5926942 | 11856042 | 7902234 | 6586460 |
| 32 | 11139071 | 11135222 | 22269858 | 11136585 | 14852185 | 22275517 | 13364689 | 11137700 | 22275957 | 14851828 | 12378407 |
| 33 | 20970782 | 20966894 | 41934802 | 20969409 | 27954245 | 41934626 | 25163015 | 20968522 | 41935667 | 27949861 | 23291278 |
| 34 | 39535081 | 39542451 | 79077648 | 39541095 | 52719119 | 79087959 | 47446416 | 39544059 | 79085803 | 52722123 | 43936070 |
| 35 | 74697745 | 74704771 | 149384651 | 74700522 | 99595308 | 149405609 | 89641836 | 74686790 | 149389578 | 99599179 | 83008986 |
| 36 | 141342490 | 141326344 | 282669548 | 141314246 | 188433913 | 282645250 | 169594460 | 141336646 | 282655523 | 188448283 | 157031848 |
| 37 | 267812262 | 267809109 | 535618852 | 267819384 | 357084239 | 535614909 | 321361370 | 267807505 | 535610065 | 357078431 | 297588405 |
| 38 | 508194094 | 508203585 | 1016436932 | 508203225 | 677584245 | 1016383925 | 609816487 | 508171536 | 1016382990 | 677599417 | 564642794 |

2 lentelėje pateiktas pirminių porų $(p, p+d)$ kiekis $b_{n,d}$ intervaluose $(2^n, 2^{n+1}]$, kai $n \leqslant 38$ ir $d \leqslant 22$. Jei pirmoji Hardžio-Litlvudo hipotezė yra teisinga, tai pirminių porų kiekių atitinkamuose intervaluose santykiai $b_{n,d}/b_{n,2} \sim R_d$. Rezultatai, pateikti 3 lentelėje, eksperimentiškai patvirtina hipotezę.

Nagrinėsime sveikųjų skaičių sekų $\{b_{n,d}\}$ gretimų elementų santykį.

**1 teorema.** *Jei pirmoji Hardžio–Litlvudo hipotezė* (1) *yra teisinga, tai*

$$\rho_n := \frac{b_{n+1,d}}{b_{n,d}} = 2 - \frac{4}{n} + \left(14 - \frac{4}{\log 2}\right)\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{5}$$

*Įrodymas.* Iš (1) ir (3), turime

$$\pi_d(x) = 2C_2R_d\sum_{j=1}^{3}\frac{j!x}{(\log x)^{j+1}} + O\left(\frac{x}{\log^5 x}\right).$$

Pažymėkime $\theta = 1/\log 2$ ir nagrinėkime santykį

$$\begin{aligned} r_n := \frac{\pi_d(2^{n+1})}{\pi_d(2^n)} &= \frac{2\sum_{j=1}^{3} j!(n+1)^{-(j+1)}\theta^{j+1} + O(n^{-5})}{\sum_{j=1}^{3} j!n^{-(j+1)}\theta^{j+1} + O(n^{-5})} \\ &= 2\frac{(1+n^{-1})^{-2} + 2\theta n^{-1}(1+n^{-1})^{-3} + 6\theta^2 n^{-2}(1+n^{-1})^{-4} + O(n^{-3})}{1 + 2\theta n^{-1} + 6\theta^2 n^{-2} + O(n^{-3})} \end{aligned}$$

**3 lentelė.** Pirminių skaičių porų $(p, p+d)$ kiekių intervaluose $(2^n, 2^{n+1}]$ santykiai.

| $n$ | $b_{n,4}/b_{n,2}$ | $b_{n,6}/b_{n,2}$ | $b_{n,8}/b_{n,2}$ | $b_{n,10}/b_{n,2}$ | $b_{n,12}/b_{n,2}$ | $b_{n,14}/b_{n,2}$ | $b_{n,16}/b_{n,2}$ | $b_{n,18}/b_{n,2}$ | $b_{n,20}/b_{n,2}$ | $b_{n,22}/b_{n,2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | 0,5 | 1,5 | 1 | 1 | 2 | 1,5 | 0,5 | 1,5 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 2,5 | 1 | 1,5 | 2 | 1,5 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 6 | 2 | 2,333333 | 1 | 1,666667 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1,333333 |
| 7 | 0,571429 | 1,571429 | 0,714286 | 1 | 1,714286 | 0,857143 | 1 | 1,857143 | 0,857143 | 0,714286 |
| 8 | 1,571429 | 2,428571 | 1,285714 | 1,857143 | 2,714286 | 1,714286 | 1,142857 | 2,285714 | 2,142857 | 1,714286 |
| 9 | 1,25 | 2,333333 | 1,25 | 1,666667 | 2,083333 | 1,666667 | 1,25 | 2,583333 | 1,5 | 1,333333 |
| 10 | 0,884615 | 2,115385 | 0,961538 | 1,307692 | 2 | 1,038462 | 0,846154 | 1,730769 | 1,384615 | 0,923077 |
| 11 | 0,977778 | 1,755556 | 1,022222 | 1,155556 | 1,844444 | 1,222222 | 0,911111 | 1,911111 | 1,133333 | 1,066667 |
| 12 | 0,914286 | 2,028571 | 1,028571 | 1,357143 | 2 | 1,171429 | 0,985714 | 2,042857 | 1,3 | 1,114286 |
| 13 | 1,159292 | 2,132743 | 1,070796 | 1,380531 | 2,115044 | 1,362832 | 1,008850 | 2,123894 | 1,433628 | 1,212389 |
| 14 | 0,916279 | 2,018605 | 0,967442 | 1,218605 | 1,948837 | 1,181395 | 0,948837 | 2 | 1,334884 | 1,060465 |
| 15 | 1,011268 | 2,025352 | 1,076056 | 1,414085 | 1,980282 | 1,261972 | 1,095775 | 2,070423 | 1,338028 | 1,157746 |
| 16 | 0,987988 | 1,938438 | 1,006006 | 1,324324 | 2,013514 | 1,181682 | 0,971471 | 1,993994 | 1,337838 | 1,078078 |
| 17 | 1,006071 | 2,011275 | 0,994796 | 1,345186 | 1,978317 | 1,243712 | 0,999133 | 2,025152 | 1,333912 | 1,112749 |
| 18 | 1 | 2,014003 | 1,018349 | 1,341864 | 2,027523 | 1,214872 | 1,033317 | 2,019797 | 1,360212 | 1,138580 |
| 19 | 0,991017 | 1,991546 | 0,995773 | 1,325495 | 1,988639 | 1,178336 | 0,985205 | 1,986526 | 1,332893 | 1,108587 |
| 20 | 0,979182 | 1,948169 | 0,983776 | 1,300215 | 1,962958 | 1,159943 | 0,973869 | 1,957071 | 1,306533 | 1,082125 |
| 21 | 0,995998 | 1,986715 | 0,986795 | 1,325090 | 1,984554 | 1,200480 | 0,994478 | 1,995038 | 1,322849 | 1,099320 |
| 22 | 0,996379 | 1,998984 | 1,000839 | 1,329727 | 2,007155 | 1,198560 | 0,998852 | 1,999647 | 1,332995 | 1,116681 |
| 23 | 1,001490 | 1,984690 | 0,998846 | 1,336017 | 1,995289 | 1,200106 | 0,994496 | 1,997020 | 1,326452 | 1,107071 |
| 24 | 0,998926 | 2,001270 | 1,001401 | 1,334721 | 2,003732 | 1,199552 | 1,006979 | 1,999201 | 1,334813 | 1,111220 |
| 25 | 1,000461 | 2,001965 | 1,001369 | 1,334133 | 2,002497 | 1,200477 | 1,003633 | 2,006208 | 1,333175 | 1,117522 |
| 26 | 1,001647 | 2,000787 | 0,996409 | 1,332662 | 1,997998 | 1,201183 | 0,999908 | 1,998170 | 1,330958 | 1,108156 |
| 27 | 1,001448 | 2,001672 | 1,000967 | 1,334942 | 2,003479 | 1,203279 | 1,001800 | 2,003800 | 1,335692 | 1,112609 |
| 28 | 1,000113 | 1,999266 | 1,000591 | 1,333712 | 1,999179 | 1,199208 | 1,001125 | 1,999182 | 1,333841 | 1,111814 |
| 29 | 0,999403 | 1,999745 | 1,000887 | 1,333925 | 1,999032 | 1,198770 | 1,000055 | 1,999540 | 1,332314 | 1,110505 |
| 30 | 0,999836 | 1,999404 | 0,999652 | 1,334123 | 2,000536 | 1,200415 | 1,000202 | 2,000258 | 1,334126 | 1,111507 |
| 31 | 1,000214 | 2,000027 | 1,000117 | 1,332303 | 2,000157 | 1,199614 | 0,999669 | 1,999702 | 1,332832 | 1,110907 |
| 32 | 0,999654 | 1,999256 | 0,999777 | 1,333341 | 1,999764 | 1,199803 | 0,999877 | 1,999804 | 1,333309 | 1,111260 |
| 33 | 0,999815 | 1,999678 | 0,999935 | 1,333009 | 1,999669 | 1,199908 | 0,999892 | 1,999719 | 1,332800 | 1,110654 |
| 34 | 1,000186 | 2,000189 | 1,000152 | 1,333477 | 2,000450 | 1,200109 | 1,000227 | 2,000396 | 1,333553 | 1,111319 |
| 35 | 1,000094 | 1,999855 | 1,000037 | 1,333311 | 2,000135 | 1,200061 | 0,999853 | 1,999921 | 1,333363 | 1,111265 |
| 36 | 0,999886 | 1,999891 | 0,999800 | 1,333172 | 1,999719 | 1,199883 | 0,999959 | 1,999792 | 1,333274 | 1,111002 |
| 37 | 0,999988 | 1,999979 | 1,000027 | 1,333338 | 1,999964 | 1,199950 | 0,999982 | 1,999946 | 1,333316 | 1,111183 |
| 38 | 1,000019 | 2,000096 | 1,000018 | 1,333318 | 1,999992 | 1,199968 | 0,999956 | 1,999990 | 1,333348 | 1,111077 |

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(1 + \frac{2\theta - 2}{n} + \frac{3 - 6\theta + 6\theta^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{2\theta}{n} - \frac{2\theta^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 2 - \frac{4}{n} + \frac{6 - 4\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}
$$

Grįžtant prie sekos $\{b_{n,d}\}$ gretimų elementų santykio $\rho_n$, gauname

$$
\begin{aligned}
\rho_n &= \frac{\pi_d(2^{n+2}) - \pi_d(2^{n+1})}{\pi_d(2^{n+1}) - \pi_d(2^n)} = \frac{r_{n+1} - 1}{1 - r_n^{-1}} \\
&= \frac{1 - 4(n+1)^{-1} + (6 - 4\theta)(n+1)^{-2} + O(n^{-3})}{1 - 1/2(1 - 2n^{-1} + (3 - 2\theta)n^{-2} + O(n^{-3}))^{-1}} \\
&= \frac{2 - 8n^{-1}(1 - n^{-1}) + (12 - 8\theta)n^{-2} + O(n^{-3})}{1 - (2n^{-1} + (1 + 2\theta)n^{-2} + O(n^{-3}))}
\end{aligned}
$$

$$= \left(2 - \frac{8}{n} + \frac{20-8\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$\times \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{5+2\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 2 - \frac{4}{n} + \frac{14-4\theta}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

ką ir tvirtina teorema. □

*1 pastaba.* Skaitiniai eksperimentai patvirtina šį rezultatą. 4 lentelėje yra pateikti sekos, asocijuotos su pirminiais dvyniais $\{b_{n,2}\}$, elementai ir jų santykiai $\rho_n$, $n \leqslant 42$. Sekos elementai buvo apskaičiuoti naudojant lygiagrečiuosius skaičiavimus ir taikant Milerio-Rabino tikimybinį testą (iki 10 kartų) kiekvienai potencialiai pirminių dvynių porai. Šiems skaičiavimams atlikti buvo naudojami 24 procesoriaus AMD Ryzen 9 5950x procesai ir C++ OpenMP technologija. Buvo patikrinta apie pusantro kvadrilijono potencialių pirminių dvynių porų ($6k \pm 1$) ir nustatyta, kad iš jų daugiau nei 14 milijardų yra pirminių dvynių poros. Skaičiavimai užtruko 33 valandas.

**4 lentelė.** Sekos, asocijuotos su pirminiais dvyniais, elementai ir jų santykiai.

| $n$ | $b_{n,2}$ | $\rho_n$ | $n$ | $b_{n,2}$ | $\rho_n$ | $n$ | $b_{n,2}$ | $\rho_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 15 | 355 | 1,876056 | 29 | 1689477 | 1,870468 |
| 2 | 1 | 1 | 16 | 666 | 1,731231 | 30 | 3160113 | 1,876168 |
| 3 | 1 | 2 | 17 | 1153 | 1,796184 | 31 | 5928904 | 1,878774 |
| 4 | 2 | 1 | 18 | 2071 | 1,827620 | 32 | 11139071 | 1,882633 |
| 5 | 2 | 1,5 | 19 | 3785 | 1,840159 | 33 | 20970782 | 1,885246 |
| 6 | 3 | 2,333333 | 20 | 6965 | 1,793970 | 34 | 39535081 | 1,889404 |
| 7 | 7 | 1 | 21 | 12495 | 1,812165 | 35 | 74697745 | 1,892192 |
| 8 | 7 | 1,714286 | 22 | 22643 | 1,837566 | 36 | 141342490 | 1,894775 |
| 9 | 12 | 2,166667 | 23 | 41608 | 1,835488 | 37 | 267812262 | 1,897576 |
| 10 | 26 | 1,730769 | 24 | 76371 | 1,845517 | 38 | 508194094 | 1,900107 |
| 11 | 45 | 1,555556 | 25 | 140944 | 1,857135 | 39 | 965623233 | 1,902551 |
| 12 | 70 | 1,614286 | 26 | 261752 | 1,852777 | 40 | 1837147717 | 1,904978 |
| 13 | 113 | 1,902655 | 27 | 484968 | 1,865688 | 41 | 3499726481 | 1,907078 |
| 14 | 215 | 1,651163 | 28 | 904799 | 1,867240 | 42 | 6674251373 | |

## 3 Sekos, asocijuotos su pirminiais $k$-rinkiniais

Tegu $\{h_j\}$, yra monotoniškai didėjanti teigiamų lyginių skaičių seka, kai $1 \leqslant j \leqslant k$, ir $h_0 = 0$. Jei $p + h_j \in \mathbb{P}$, $0 \leqslant j \leqslant k$, tai seka $H = \{p + h_j\}$ yra pirminis $k$-rinkinys ir $\#H = k + 1$. Jei seka $H$ nesudaro pilnos liekanų klasės pirminio skaičiaus atžvilgiu, t.y., $\#\{H \bmod p\} < p$, visiems $p \in \mathbb{P}$, tai pirminis $k$-rinkinys yra vadinamas leistinu. Hardis ir Litlvudas iškėle hipotezę apie leistinų pirminių $k$-rinkinių asimptotinį tankį [2, 8].

**3 teiginys [*Pirmoji Hardžio-Litlvudo hipotezė pirminiams $k$-rinkiniams*].** *Jei $\pi_H(x)$, yra leistinų pirminių $k$-rinkinių skaičiuojančioji funkcija, tai*

$$\pi_H(x) = \#\{p \leqslant x \mid p + h_j \in \mathbb{P};\ j \in [1,k]\} = C_H Li_{k+1}(x) + O\left(x^{1/2+\varepsilon}\right), \qquad (6)$$

*kur $\varepsilon$ yra mažas teigiamas skaičius ir $C_H$ yra pirminių $k$-rinkinių konstanta,*

$$C_H = 2^k \prod_{p \geqslant 3} \left(1 - \frac{\#\{H \ mod\, p\}}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(k+1)}. \tag{7}$$

Nagrinėsime sveikųjų skaičių seką $\{a_{n,H}\}$, asocijuotą su pirminiais $k$-rinkiniais,

$$a_{n,H} = \#\big\{s^n < p \leqslant s^{n+1} \mid p + h_j \in \mathbb{P};\ j \in [1,k]\big\}, \quad n \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{R},\ s \geqslant 2. \tag{8}$$

Galima suformuluoti rezultatą apie sekos $\{a_{n,H}\}$ gretimų elementų santykį.

**2 teorema.** *Jei pirmoji Hardžio-Litlvudo hipotezė* (6) *yra teisinga, tai*

$$\hat{\rho}_n = \frac{a_{n+1,H}}{a_{n,H}} = s - \frac{s(k+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{9}$$

*Įrodymas.* Iš (6) ir asimptotikos (3) turime

$$\pi_H(x) = C_H x\big((\log x)^{-(k+1)} + (k+1)(\log x)^{-(k+2)} + O\big((\log x)^{-(k+3)}\big)\big).$$

Pažymėkime $\theta_s = 1/\log s$ ir nagrinėkime santykį $\hat{r}_n$,

$$\begin{aligned}
\hat{r}_n &= \frac{\pi_H(s^{n+1})}{\pi_H(s^n)} \\
&= s\frac{(n+1)^{-(k+1)}\theta_s^{k+1} + (k+1)(n+1)^{-(k+2)}\theta_s^{k+2} + O\left(n^{-(k+3)}\right)}{n^{-(k+1)}\theta_s^{k+1} + (k+1)n^{-(k+2)}\theta_s^{k+2} + O\left(n^{-(k+3)}\right)} \\
&= s\frac{(1+n^{-1})^{-(k+1)} + (k+1)\theta_s n^{-1}(1+n^{-1})^{-(k+2)} + O\left(n^{-2}\right)}{1 + (k+1)\theta_s n^{-1} + O\left(n^{-2}\right)} \\
&= s\left(1 + \frac{(k+1)(\theta_s - 1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{(k+1)\theta_s}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= s - \frac{s(k+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Grįžtant prie sekos $\{a_{n,H}\}$ gretimų elementų santykio $\rho_n$, gauname

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_n &= \frac{\pi_H(s^{n+2}) - \pi_H(s^{n+1})}{\pi_H(s^{n+1}) - \pi_H(s^n)} \\
&= \frac{\hat{r}_{n+1} - 1}{1 - \hat{r}_n^{-1}} = \frac{s - 1 - s(k+1)(n+1)^{-1} + O(n^{-2})}{1 - 1/s(1 - (k+1)b^{-1} + O(b^{-2}))^{-1}} \\
&= \frac{s - s^2(k+1)/((s-1)n) + O(n^{-2})}{1 - (k+1)/((s-1)n) + O(n^{-2})} = \left(s - \frac{s^2(k+1)}{(s-1)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{k+1}{(s-1)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = s - \frac{s(k+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

ką ir tvirtina teorema. $\square$

## Literatūra


[1] S. L. Aletheia-Zomlefer, L. Fukshansky, S. R. Garcia. The Bateman-Horn conjecture: heuristic, history, and applications. *Expo. Math.*, **38**:430–479, 2020. https://doi.org/10.1016/j.exmath.2019.04.005.

[2] W. Banks, K. Ford, T. Tao. Large prime gaps and probabilistic models, 2023. https://arxiv.org/abs/1908.08613. arXiv:1908.08613.

[3] D. Goldston, J. Pintz, C. Yıldırım. Primes in tuples. I. *Ann. Math.*, **170**(2):819–862, 2009. https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.819.

[4] J. Korevaar. The prime-pair conjectures of Hardy and Littlewood. *Indag. Math.*, **23**(3):269–299, 2012. https://doi.org/10.1016/j.indag.2011.12.001.

[5] J. Maynard. The twin prime conjecture. *Japan. J. Math.*, **14**:175–206, 2019. https://doi.org/10.1007/s11537-019-1837-z.

[6] G. Di Pietro. Numerical analysis approach to twin primes conjecture. *Notes Number Theory Discrete Math.*, **27**(3):175–183, 2021. https://doi.org/10.7546/nntdm.2021.27.3.175-183.

[7] D.H.J. Polymath. Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes. *Math. Sci.*, **1**(12), 2014. https://doi.org/10.1186/s40687-014-0012-7.

[8] L. Tóth. On the asymptotic density of prime $k$-tuples and a conjecture of Hardy and Littlewood. *CMST*, **25**(3):143–148, 2019. https://doi.org/10.12921/cmst.2019.0000033.

[9] Y. Zhang. Bounded gaps between primes. *Ann. Math.*, **179**(3):1121–1174, 2014. https://doi.org/10.4007/annals.2014.179.3.7.



SUMMARY

**On the calculation of integer sequences, associated with twin primes**

*I. Belovas, M. Sabaliauskas, P. Mykolaitis*

The twin primes conjecture states that there are infinitely many twin primes. While studying this hypothesis, many important results were obtained, but the problem remains unsolved. In this work, the problem is studied from the side of experimental mathematics. Using the probabilistic Miller-Rabin primality test and parallel computing technologies, the distribution of prime pairs in the intervals $(2^n; 2^{n+1}]$ is studied experimentally.


*Keywords*: integer sequences; Hardy-Littlewood conjecture; prime $k$-tuples