Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
64 tomas, 2023, 98–113
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33600

Didėjančios funkcijos apibrėžimas

Robertas Vilkas

Vilniaus Vytauto Didžiojo gimnazija
Augustijonų g. 8, LT-01127 Vilnius, Lietuva
El. paštas: robertas.vilkas@gmail.com

Įteiktas 2023 liepos 9; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Aptariami bendrojo didėjančios (mažėjančios, nemažėjančios, nedidėjančios) funkcijos apibrėžimo taikymo niuansai. Atsakoma į mokytojams rūpimą klausimą: ar funkcija gali būti didėjanti ne tik atvirame intervale?

Raktiniai žodžiai: didėjanti funkcija; mažėjanti funkcija; nemažėjanti funkcija; nedidėjanti funkcija

AMS: 97Ixx

Įvadas

Bendrą didėjančios (mažėjančios, nemažėjančios ar nedidėjančios) funkcijos apibrėžimą sunku surasti ne tik lietuviškoje, bet ir angliškoje literatūroje, nes gana dažnai apibrėžimas pateikiamas tik intervalams arba tik visai apibrėžimo sričiai. Tačiau intervalų sąjunga yra nebūtinai intervalas ir todėl atsiranda neaiškumas, kaip tokiose aibėse reikėtų traktuoti funkcijos didėjimą. Kita šio straipsnio priežastis yra ta, kad kai kurie mokytojai funkcijos didėjimą pateikia tik *atviruose* intervaluose.

Pavyzdžiui, 2013 m. PUPP 4.2 užduotyje reikėjo nustatyti su kokiomis x reikšmėmis funkcija $f(x) = x(x-4)$ yra didėjanti ir vertinimo instrukcijoje atsakymas yra $(2, +\infty)$, nors turėtų būti $[2, +\infty)$, nes tai yra plačiausias intervalas, kuriame duotoji funkcija yra didėjanti.

Tokie netikslumai atsirado todėl, kad mokykliniuose vadovėliuose nėra tikslaus didėjančios funkcijos apibrėžimo. Šiuos netikslumus reikia ištaisyti todėl, kad jei mokinys parašytų matematiškai teisingą atsakymą, t. y. $[2, +\infty)$, tai toks mokinys neturėtų prarasti taškų.

Analogiška situacija yra su 2023 m. VBE 21.2 užduotimi, kurioje reikėjo nustatyti su kuriomis x reikšmėmis funkcija $f(x) = -x^3+3x^2+9x+4$ yra mažėjanti. Vertinimo instrukcijoje parašytas toks atsakymas:

$$x \in (-\infty; -1), (3; +\infty).$$

Pastarajame atsakyme yra dar viena problema: kaip interpretuoti čia esantį kablelį? Ar čia yra aibių sankirta, ar sąjunga, ar kitas atvejis? Juk jei $x \in A$ ir $x \in B$, tai $x \in A \cap B$. O jei $x \in A$ arba $x \in B$, tai $x \in A \cup B$. Tačiau čia nei vienas iš šių atvejų netinka. Teisingas atsakymas būtų pvz. toks:

$$\text{mažėjanti, kai } x \in (-\infty, -1] \text{ ir mažėjanti, kai } x \in [3, +\infty),$$

arba, trumpiau,

$$\text{mažėjanti, kai } x \in (-\infty, -1] \text{ ir kai } x \in [3, +\infty).$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad šis atsakymas nesutampa su tokiu atsakymu:

$$\text{mažėjanti, kai } x \in (-\infty, -1] \text{ ir } x \in [3, +\infty),$$

nes pastarasis reiškia, kad mažėjanti, kai $x \in (-\infty, -1] \cap [3, +\infty)$ ir tai būtų netinkamas atsakymas. Dar atkreipsime dėmesį į tai, kad toks atsakymas:

$$\text{mažėjanti, kai } x \in (-\infty, -1] \text{ arba kai } x \in [3, +\infty)$$

taip pat būtų neteisingas, nes jis reiškia, kad bent viename iš šių intervalų funkcija yra mažėjanti, t. y. viename iš jų funkcija galėtų ir nebūti mažėjanti. Toks atsakymas (jis nesutampa su prieš tai buvusiu)

$$\text{mažėjanti, kai } x \in (-\infty, -1] \text{ arba } x \in [3, +\infty)$$

yra taip pat neteisingas, nes jis reiškia, kad funkcija yra mažėjanti kai $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. Įvedus *mažėjimo intervalų* terminą (žr. 7 skyrių) atsakymą galima pateikti taip:

$$\text{mažėjimo intervalai: } (-\infty, -1],\ [3, +\infty).$$

Dar viena šio straipsnio priežastis yra toks klausimas: ar funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ yra mažėjanti savo apibrėžimo srityje? Nei vienas iš mano kalbintų matematikos mokytojų nepateikė teisingo atsakymo į šį klausimą. Atsakymas pateiktas 5.6 pavyzdyje. Šis klausimas gerai iliustruoja, kodėl yra reikalingas bendras mažėjančios funkcijos apibrėžimas, nes neturint apibrėžimo negalima būtų teigti, ar atsakymas į minėtą klausimą yra teisingas, ar neteisingas.

Pateiksime bendrą apibrėžimą (apsiribojame tik realiosiomis vieno kintamojo funkcijomis), kuris yra pvz. [13, p. 98] (ten formuluotė šiek tiek kitokia, bet ten pateiktas bendrasis atvejis yra ekvivalentus 1 apibrėžimui).

1 Apibrėžimas

1 apibrėžimas. Tarkime, kad $A \subset D_f \subset \mathbb{R}$, kur D_f yra funkcijos f apibrėžimo sritis. Funkcija f vadinama *didėjančia* aibėje A, jei

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcija f vadinama *mažėjančia* aibėje A, jei

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcija f vadinama *nemažėjančia* aibėje A, jei

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Funkcija f vadinama *nedidėjančia* aibėje A, jei

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Visų šių 4 tipų funkcijos vadinamos *monotoninėmis* aibėje A. Funkcija vadinama *griežtai monotonine* aibėje A, jei ji yra didėjanti aibėje A arba mažėjanti aibėje A.

Kartais patogiau pastovios funkcijos sąvoką apibrėžti naudojantis 1 apibrėžimo sąvokomis.

2 apibrėžimas. Funkcija f vadinama *pastovia* aibėje A, jei f yra šioje aibėje nemažėjanti ir nedidėjanti.

2 Didėjanti ar didėjančioji?

Mes naudojame terminą *didėjanti funkcija* vietoje *didėjančioji funkcija*, nes tai yra patogesnis terminas (trumpesnis, lengviau ištariamas, neprieštarauja kitoms sąvokoms).

Terminą *didėjanti funkcija* naudoja J. Kubilius [8, p. 133], R. Lapinskas [9], E. Misevičius [10, p. 43], V. Pekarskas [12, p. 44], Lietuvių enciklopedija.

Terminą *didėjančioji funkcija* naudoja Matematikos terminų žodynas [1, p. 75], V. Kabaila [4, p. 42], Matematika 9 (tempus) [6, p. 178].

Knygoje [3, p. 210] yra netgi terminas *funkcija didėja*. PUPP ir VBE užduotyse plačiai naudojamas terminas *funkcijos reikšmės didėja*. Pastarasis terminas yra netinkamas, nes juk kalbame apie funkcijos, o ne funkcijos reikšmių, savybę.

3 Apibrėžimo korektiškumas

Gali iškilti klausimas dėl teiginio

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{1}$$

korektiškumo šiais dviem atvejais:

1) Kadangi parašyta $x_1, x_2 \in A$, tai x_1 ir x_2 gali būti ir tokie, kai nelygybė $x_1 < x_2$ negalioja. Pvz. kai $|A| = 1$, t. y. kai aibėje A yra tik vienas elementas, tai nelygybė $x_1 < x_2$ netgi visada negalios.
2) Jeigu $A = \varnothing$, tai ar galime teigti, kad $x_1 < x_2$ yra teisingas arba neteisingas teiginys?

3.1 Pirmasis atvejis

Jei teiginys p yra teisingas, tai rašysime $p = 1$, o jei neteisingas, tai $p = 0$. Jeigu p ir q yra teiginiai, tai implikacija $p \Rightarrow q$ yra taip pat teiginys, kuris reiškia, kad iš teiginio p išplaukia teiginys q. *Implikacijos teisingumo lentelė* yra tokia [15, p. 47]:

1 lentelė.

p	q	$p \Rightarrow q$	Prasmė
0	0	1	jei p ir q neteisingi, tai $p \Rightarrow q$ teisingas
0	1	1	jei p neteisingas ir q teisingas, tai $p \Rightarrow q$ teisingas
1	0	0	jei p teisingas ir q neteisingas, tai $p \Rightarrow q$ neteisingas
1	1	1	jei p ir q teisingi, tai $p \Rightarrow q$ teisingas

1 lentelės esmė tokia: iš neteisingo teiginio išplaukia bet koks teiginys, o teisingas teiginys išplaukia iš bet kokio teiginio.

Taigi, jeigu x_1 ir x_2 yra tokie, kad $x_1 < x_2$ negalioja, tai turime neteisingą teiginį, o iš neteisingo teiginio išplaukia bet koks teiginys, t. y. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ yra teisingas teiginys, nepriklausomai nuo to, kokia yra funkcija f. Todėl funkcijai f atsiranda apribojimas tik tuomet, kai nelygybė $x_1 < x_2$ galioja. Vadinasi, jei $|A| = 1$, tai visada bus $x_1 = x_2$ ir nelygybė $x_1 < x_2$ negalios, ir todėl bet kokia funkcija f bus didėjanti tokioje aibėje A.

3.2 Antrasis atvejis

Teiginiui (čia $P(x)$ yra bet kokia loginė formulė)

$$\forall x \in A : P(x) \tag{2}$$

ekvivalentų teiginį galime užrašyti naudojant implikaciją [15, p. 73]:

$$\forall x : \bigl(x \in A \Rightarrow P(x)\bigr). \tag{3}$$

Čia $x \in A \Rightarrow P(x)$ nėra *teiginys*. Tai *predikatas*, nes nenurodyta konkreti x reikšmė. Bet jeigu imame kokį nors konkretų x, tai $x \in A \Rightarrow P(x)$ jau tampa teiginiu, kuris gali būti teisingas arba ne, priklausomai nuo x reikšmės (uždėjus kvantorių $\forall$ jis taip pat tampa teiginiu, o būtent (3)).

Jeigu $A = \varnothing$, tai kiekvienam x teiginys $x \in A$ bus neteisingas. Todėl iš implikacijos teisingumo lentelės gauname, kad bet kuriai formulei $P(x)$ teiginys $x \in A \Rightarrow P(x)$ bus teisingas (bet kuriam fiksuotam x tai yra teiginys). Todėl teiginys (3) (o tuo pačiu ir teiginys (2)) yra visada teisingas, kai $A = \varnothing$.

Taigi, gavome teiginį

$$\forall x \in \varnothing : P(x), \tag{4}$$

kuris yra visada teisingas. Čia yra viena iš taip vadinamų *tuščių tiesų* (vacuous truth) [15, p. 73].

Analogiškai taip, kaip vietoje teiginio (2) užrašėme jam ekvivalentų teiginį (3), galime vietoje teiginio (1) užrašyti tokį jam ekvivalentų teiginį:

$$\forall x_1, x_2 : \bigl(x_1, x_2 \in A \Rightarrow \bigl(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\bigr)\bigr).$$

Dabar aišku, kodėl šis (todėl ir (1)) teiginys yra visada teisingas, kai $A = \varnothing$. Ir čia jau visai nesvarbu kokia funkcija f ir ar nelygybė $x_1 < x_2$ galioja, ar ne.

4 Savybės

Paeitame skyriuje įrodėme savybę didėjančiai funkcijai, tačiau analogiškas įrodymas tinka ir bet kuriai monotoninei funkcijai. Suformuluosime minėtą savybę tokioje teoremoje.

1 teorema. *Jeigu $A = \varnothing$ arba $A = \{x\}$, kur $x \in D_f$, tai funkcija f yra vienu metu didėjanti, mažėjanti, nedidėjanti ir nemažėjanti aibėje A.*

Sekančioje teoremoje pateikiame dar vieną savybę.

2 teorema. *Jeigu funkcija yra didėjanti (mažėjanti, nedidėjanti, nemažėjanti) aibėje A, tai ji yra didėjanti (mažėjanti, nedidėjanti, nemažėjanti) bet kuriame poaibyje $B \subset A$.*

Įrodymas. Kadangi teiginys $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ yra suformuluotas taip, kad kiekvienai porai $(x_1, x_2) \in A^2$ tikriname kažkokią savybę (šiuo atveju $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, bet čia gali būti bet kokia savybė, kuriai, žinant x_1 ir x_2, galime pasakyti ar ji galioja, ar ne), tai ta savybė juo labiau galios ir bet kurioje siauresnėje aibėje $C \subset A^2$ (todėl ir poaibyje B^2, kai $B \subset A$), nes reikės mažiau porų (x_1, x_2), kurioms galiotų ta savybė. O jeigu aibėje A yra mažiau negu 2 elementai, tai skirtingų elementų poros (x_1, x_2) negalėsime parinkti, bet pagal 1 teoremą funkcija yra didėjanti tokioje aibėje. Analogiškai įrodomi atvejai, kai f yra mažėjanti, nedidėjanti arba nemažėjanti. $\square$

Pažymėkime teiginiui p priešingą $\neg p$. Kadangi teiginiai $p \Rightarrow q$ ir $\neg q \Rightarrow \neg p$ yra ekvivalentūs [15, p. 51], tai iš 2 teoremos gauname tokį teiginį.

1 išvada. *Jeigu funkcija yra nėra monotoninė aibėje B, tai ji nebus monotoninė ir aibėje $A \supset B$.*

Taip pat iš 2 teoremos gauname tokią išvadą (pastovios funkcijos atveju žemiau pateikti teiginiai yra akivaizdūs).

2 išvada. *Jeigu funkcija yra didėjanti aibėse A ir B, tai ji bus didėjanti ir aibėje $A \cap B$. Analogiškas teiginys yra teisingas, kai funkcija yra mažėjanti, nedidėjanti, nemažėjanti ar pastovi.*

1 pastaba. Jeigu funkcija yra didėjanti aibėse A ir B, tai ji **nebūtinai** bus didėjanti aibėje $A \cup B$. Analogiškas teiginys yra teisingas, kai funkcija yra mažėjanti, nedidėjanti, nemažėjanti ar pastovi.

Ar tikrai aibę iš vieno elemento ir tuščią aibę reikia įtraukti?

Palyginkime su kitomis sąvokomis.
Juk bijekcijos apibrėžime niekas neišmeta atvejo, kai aibėje yra tik vienas elementas, nes pvz. galioja graži savybė, kad bet kokia funkcija $f : A \to B$ yra bijekcija, kai $|A| = |B| < \infty$ (šiuo atveju bijekcijos, injekcijos ir surjekcijos sąvokos sutampa,

įskaitant atvejus, kai $|A| = 1$ arba $|A| = 0$). Funkcija aibėje A yra *injekcija*, jeigu skirtingus elementus atvaizduoja į skirtingus, t. y.

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Šiame teiginyje susiduriama su visiškai analogiška situacija, kuri buvo teiginyje (1), t. y. jei $|A| = 1$, tai gauname, kad aibėje A neegzistuoja skirtingi x_1 ir x_2, todėl gali kilti klausimas, ar verta injekcijos apibrėžime įtraukti atvejį, kai $|A| = 1$. Bet jeigu pažiūrėsime į šį atvejį iš bijekcijos apibrėžimo pusės (*bijekcija* yra abipus vienareikšmis atvaizdis), tai visiškai akivaizdu, kad bet kokia funkcija $f : \{a\} \to \{b\}$ yra bijekcija, t. y. atvejo, kai $|A| = 1$, tikrai nereikia išmesti. Kadangi bijekcija yra tokia funkcija, kuri turi būti injekcija ir surjekcija vienu metu, tai ir injekcijos apibrėžime nereikia išmesti atvejo, kai $|A| = 1$.

Kaip dėl tuščios aibės? Na, tuščioje aibėje aplamai daug savybių galioja. Pvz.:

1. Tuščia aibė yra vienu metu atvira ir uždara (bet kurioje topologinėje erdvėje).
2. Teiginys $\forall x \in \varnothing : P(x)$ yra visada teisingas, kur $P(x)$ yra bet koks predikatas, priklausantis nuo x.
3. Tuščioje aibėje galioja uždarumas, asociatyvumas ir komutatyvumas, todėl algebrinė struktūra $(\varnothing, *)$ yra komutavyvi pusgrupė.
4. Tuščioje aibėje bet kokia funkcija yra: tolydi, injekcija, pastovi, didėjanti, mažėjanti, nedidėjanti, nemažėjanti, monotoninė.

Tačiau ne visos savybės galioja tuščioje aibėje. Pvz. struktūroje $(\varnothing, *)$ nėra neutraliojo elemento, todėl ji nėra monoidas, o tuo pačiu nėra ir grupė. Funkcija $f : \varnothing \to B$ nėra bijekcija, išskyrus atvejį, kai $B = \varnothing$.

Dar viena priežastis kodėl nereikėtų išmesti atvejų, kai $|A| = 0$ arba $|A| = 1$, yra ta, kad 2 išvadoje gautas teiginys galioja bet kokiems aibės D_f poaibiams A ir B, t. y. jei funkcija yra didėjanti aibėse A ir B, tai ji bus didėjanti ir jų sankirtoje $A \cap B$. Todėl pvz. jei funkcija yra didėjanti intervaluose $[1, 2]$ ir $[2, 3]$, tai ji bus didėjanti ir šių intervalų sankirtoje $\{2\}$, t. y. aibėje iš vieno elemento. Analogiška situacija yra ir tuščios aibės atveju, pvz. jei funkcija yra didėjanti aibėse $[1, 2]$ ir $[3, 4]$, tai ji turi būti didėjanti ir aibėje $[1, 2] \cap [3, 4] = \varnothing$.

Jeigu tokių atvejų nebūtume įtraukę į 1 apibrėžimą, tai susidurtume su nepatogumu kalbant apie savybę aibių sankirtoms (net ir intervalų atveju).

Juk tai yra analogiška priežastis, kodėl tuščia aibė yra įtraukiama į bet kokią topologiją, nes viena iš topologijos aksiomų yra ta, kad topologijos elementų (t. y. atvirų aibių) sankirta turi būti vėl topologijos elementas.

Trečia priežastis yra ta, kad teiginyje (1) nereikia atskirai rūpintis atvejais, kai nelygybė $x_1 < x_2$ negalioja. Be to, tai labai gerai derinasi su analogiška situacija, kuri yra įprasta tokiose savybėse: tolydumas, injekcija, algebrinės struktūros uždarumas, asociatyvumas, komutatyvumas.

Ketvirta priežastis. 5.1 pavyzdyje aiškiai matosi, kodėl natūralu laikyti, kad aibėje iš vieno taško funkcija yra vienu metu didėjanti ir mažėjanti. Čia nereikėtų painioti su *didėjimo taške* sąvoka. Pastaroji sąvoka yra atskiras klausimas, kuris yra plačiau aptartas 6 skyriuje.

5 Pavyzdžiai

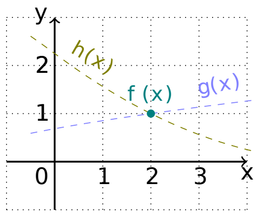
Panagrinėkime kelis pavyzdžius.

5.1 pavyzdys

Raskite visas aibes A, kuriose funkcija f yra a) didėjanti, b) mažėjanti.

$$f(x) = 1, \text{ kai } x = 2.$$

Sprendimas. Kad būtų patogiau, nubrėžkime grafiką:



Čia funkcija f yra apibrėžta tik viename taške, t. y. apibrėžimo sritis $D_f = \{2\}$. Aibė D_f turi tik du poaibius: $\varnothing$ ir $\{2\}$. a) Pagal 1 teoremą abiejuose šiuose poaibiuose funkcija f yra didėjanti. b) Be to, pagal 1 teoremą, šiuose poaibiuose funkcija f yra mažėjanti.

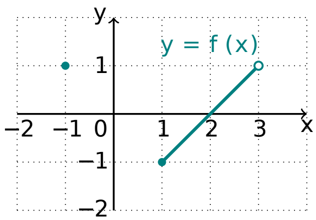
Grafike, be funkcijos f, pavaizdavome ir kitas įsivaizduojamas funkcijas g ir h (tokias, kad $g(2) = h(2) = 1$), kad iliustruotume, kodėl aibėje $\{2\}$ funkcija f gali būti vienu metu didėjanti ir mažėjanti. Pavaizduotoje srityje (pvz. intervale $[0, 4]$) funkcija g yra didėjanti, o funkcija h yra mažėjanti. Todėl pagal 2 teoremą funkcija g yra didėjanti ir bet kokiame poaibyje, įskaitant $\{2\}$. Funkcija f yra funkcijos g *siaurinys*, nes $D_f \subset D_g$ ir $\forall x \in D_f : f(x) = g(x)$. Todėl funkcija f taip pat turi būti didėjanti aibėje $\{2\}$. Analogiškai įsitikiname, kad funkcija f yra mažėjanti aibėje $\{2\}$ (nes f yra funkcijos h siaurinys ir funkcija h yra mažėjanti aibėje $\{2\}$).

5.2 pavyzdys

Raskite visas aibes A, kuriose funkcija f yra a) didėjanti, b) mažėjanti.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = -1, \\ x - 2, & x \in [1, 3). \end{cases}$$

Sprendimas. Kad būtų patogiau, nubrėžkime grafiką:



Apibrėžimo sritis $D_f = \{-1\} \cup [1,3)$. Pagal apibrėžimą turi būti $A \subset D_f$.

a) Reikia rasti visas aibes $A \subset D_f$, kurioms

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Pagal 1 teoremą visada galime imti $A = \varnothing$ ir $A = \{x\}$, kur $x \in D_f$. Iš grafiko matome, kad dar tinka visi intervalo $[1,3)$ poaibiai, nes juose $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Visi kiti aibės D_f poaibiai netinka, nes įtraukus -1 galėsime imti $x_1 = -1$, bet jei $x_1 = -1$ ir $x_2 > x_1$, tai gausime, kad nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$ negalios.

Jeigu pasinaudosime žymeniu 2^X, kuris reiškia aibės X visų poaibių aibę, tai šio uždavinio bendrą atsakymą galime užrašyti taip:

$$A \in \{\{-1\}\} \cup 2^{[1,3)}.$$

b) Dabar reikia rasti visas aibes $A \subset D_f$, kurioms

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Iš grafiko matome, kad jei $x_1 = -1$, tai teiginys $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ bus teisingas su bet kuriuo $x_2 \in [1,3)$. Todėl funkcija f yra mažėjanti aibėse $\{-1, x\}$, kai $x \in [1,3)$. Pagal 1 teoremą dar galime įtraukti tuščią aibę ir visas aibes, turinčias po vieną elementą. Kitų aibės D_f poaibių A, kuriuose f yra mažėjanti, nėra. Bendrą atsakymą galime užrašyti taip:

$$A \in \{\varnothing\} \cup \big\{\{x\} : x \in D_f\big\} \cup \big\{\{-1, x\} : x \in [1,3)\big\}.$$

Mokyklose sąlygas galima paprasčiau formuluoti. Pvz.

Pateikite dvi aibes A, kuriose funkcija f yra a) didėjanti, b) mažėjanti.

Čia atsakymas nevienareikšmis, pvz. tiktų toks:

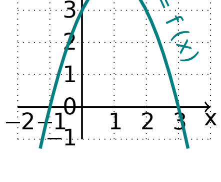
a) $A_1 = [1,2]$, $A_2 = [1,3)$; b) $A_1 = \{-1, 1\}$, $A_2 = \{-1, 2\}$.

5.3 pavyzdys

Raskite visas aibes A, kuriose funkcija f yra a) didėjanti, b) mažėjanti.

$$f(x) = (x+1)(3-x).$$

Sprendimas. Kad būtų patogiau, nubrėžkime grafiką:



a) Ši funkcija yra didėjanti intervale $(-\infty, 1]$, nes jame galioja sąlyga (1). Pagal 2 teoremą ji bus didėjanti ir bet kuriame aibės $(-\infty, 1]$ poaibyje B. Jeigu $B \subset (-\infty, 1]$ bus toks, kad jame funkcija f įgis reikšmes, mažesnes už 3 (pvz. kai $B = [-2, -1]$), tai tuomet aibėje $A = B \cup \{2\}$ sąlyga (1) galios, t. y. funkcija f bus didėjanti aibėje A. Analogiškai galime parinkti kitą poaibį $B \subset (-\infty, 1]$ taip, kad vietoje $x = 2$ galėtume imti kurį nors kitą intervalo $(1, \infty)$ elementą, tačiau daugiau kaip vieno šio intervalo elemento negalime įtraukti. Tokiu būdu nusakėme taisyklę, pagal kurią galime gauti visas ieškomas aibes, kuriose funkcija f yra didėjanti.

Bendrą atsakymą galime užrašyti taip:

$$A \in 2^{(-\infty,1]} \cup \bigl\{B \cup \{x\} : B \subset (-\infty, 1], x \in \bigl\{x_2 \in (1, \infty) : \forall x_1 \in B : f(x_1) < f(x_2)\bigr\}\bigr\}.$$

Čia patenka ir aibės $\{x\}$, kai $x \in (1, \infty)$, nes jei $B = \varnothing$, tai $B \cup \{x\} = \{x\}$ ir pagal (4) gauname, kad

$$\bigl\{x_2 \in (1, \infty) : \forall x_1 \in B : f(x_1) < f(x_2)\bigr\} = (1, \infty).$$

b) Analogiškai gauname tokį bendrą atsakymą:

$$A \in 2^{[1,\infty)} \cup \bigl\{\{x\} \cup B : B \subset [1, \infty), x \in \bigl\{x_1 \in (-\infty, 1) : \forall x_2 \in B : f(x_1) > f(x_2)\bigr\}\bigr\}.$$

Mokykliniame lygyje galima spręsti pvz. tokį uždavinį.

Raskite 5 aibes A, turinčias skirtingą kiekį elementų, kuriose funkcija

$$f(x) = (x + 1)(3 - x)$$

yra a) didėjanti, b) mažėjanti.

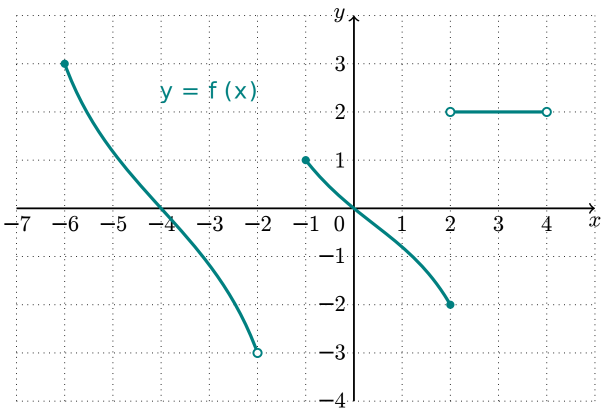
Vienas iš galimų šio uždavinio atsakymų:

a) $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \{0\}$, $A_3 = \{0, 1\}$, $A_4 = \{-2, -1, 2\}$, $A_5 = [0, 1]$.

b) $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \{0\}$, $A_3 = \{0, 3\}$, $A_4 = \{1, 2, 3\}$, $A_5 = \{0\} \cup [3, 4)$.

5.4 pavyzdys

Funkcija f pateikta grafiku:



Pateikite 3 aibes A, turinčias daugiau kaip 1 elementą, kuriose funkcija f yra a) didėjanti, b) mažėjanti. c) Ar tiesa, kad ši funkcija yra mažėjanti aibėje $[-6,-2) \cup [-1,2]$?

Vienas iš galimų šio uždavinio atsakymų:

a) $A_1 = \{-3,-1\}$, $A_2 = \{-3,3\}$, $A_3 = \{-3,-1,3\}$;

b) $A_1 = [-6,-4]$, $A_2 = [-6,-2)$, $A_3 = [-1,2]$;

c) ne, nes pvz. jei $x_1 = -3$ ir $x_2 = 0$, tai $x_1, x_2 \in [-6,-2) \cup [-1,2]$ ir $x_1 < x_2$, bet $f(x_1) \approx -1{,}2 < f(x_2) \approx 0$ (o turėtų būti $f(x_1) > f(x_2)$).

5.5 pavyzdys

Pateikite pavyzdį neaprėžtos aibės A, kurioje funkcija

$$f(x) = \sin(x)$$

yra a) didėjanti, b) mažėjanti, c) nemažėjanti, d) nedidėjanti, e) pastovi.

Sprendimas.

a) Funkcija f yra didėjanti intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$, be to, ji yra periodinė aibėje $\mathbb{R}$, todėl galime konstruoti aibę taip: iš pradžių intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$ parenkame didėjančią seką, pvz. $x_k = (1 - \frac{1}{2^k})\frac{\pi}{2}$. Tuomet seka $f(x_k)$ bus taip pat didėjanti ir ji nepasikeis, jeigu funkcijos f argumente bus pridėtas periodo kartotinis, pvz. taip: $f(x_k + 2k\pi)$. Be to, aibė

$$A = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{N} \right\}$$

yra *neaprėžta* (t. y. neegzistuoja toks skaičius $a > 0$, kad $\forall x \in A : |x| < a$). Vadinasi, ši aibė tinka, nes šioje aibėje funkcija f yra didėjanti.

b) Analogiškai gauname, kad neaprėžtoje aibėje

$$A = \left\{ \left(2 - \frac{1}{2^k}\right)\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{N} \right\}$$

funkcija f yra mažėjanti.

c) Funkcija f yra nemažėjanti kiekvienoje aibėje, kurioje ji yra didėjanti, bet pateikime kitą pavyzdį:

$$A = \{0\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

d) Analogiškai, funkcija f yra nedidėjanti pvz. aibėje:

$$A = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \cup \{k\pi : k \in \mathbb{N}\}.$$

e) Funkcija f yra pastovi pvz. aibėje:

$$A = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

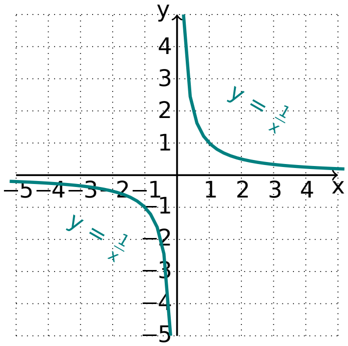
5.6 pavyzdys

Raskite visas aibes A, kuriose funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

yra a) mažėjanti, b) didėjanti. c) Ar funkcija f yra mažėjanti savo apibrėžimo srityje?

Sprendimas. Kad būtų patogiau, nubrėžkime grafiką:



Apibrėžimo sritis $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

a) Funkcija f yra mažėjanti intervale $(-\infty, 0)$, nes jei $x_1 < x_2 < 0$, tai $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, t. y. $f(x_1) > f(x_2)$. Pagal 2 teoremą ji yra mažėjanti ir bet kuriame aibės $(-\infty, 0)$ poaibyje. Analogiškai įsitikiname, kad funkcija f yra mažėjanti bet kuriame aibės $(0, \infty)$ poaibyje. Be to, pagal 1 teoremą, reikia įtraukti aibę $\varnothing$ ir aibes $\{x\}$, kai $x \in D_f$, tačiau visi šie aibės D_f poaibiai bus aibės $(-\infty, 0)$ arba aibės $(0, \infty)$ poaibiai, t. y. juos jau įtraukėme. Kitų aibės D_f poaibių, kuriuose funkcija f yra mažėjanti, nėra. Gavome gražų bendrą atsakymą:

$$A \in 2^{(-\infty,0)} \cup 2^{(0,\infty)}.$$

b) Pastebime, kad (1) sąlyga galioja tik tuomet, kai aibėje A yra nedaugiau 2 elementų, nes jeigu $|A| > 2$, tai $\exists x_1, x_2 \in A$ tokie, kad $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ arba $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, tačiau abiem šiais atvejais būtų $f(x_1) > f(x_2)$ ir todėl funkcija f negalėtų būti didėjanti aibėje A. Jeigu $|A| = 2$, $x_1, x_2 \in A$ ir $x_1 < x_2$, tai nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$ galioja tada ir tik tada, kai $x_1 \in (-\infty, 0)$ ir $x_2 \in (0, \infty)$. Pagal 1 teoremą atvejus, kai $|A| \in \{0, 1\}$, visada įtraukiame. Taigi, bendras atsakymas yra toks:

$$A \in \varnothing \cup \big\{\{x\} : x \in D_f\big\} \cup \big\{\{x_1, x_2\} : x_1 \in (-\infty, 0), x_2 \in (0, \infty)\big\}.$$

c) Apibrėžimo srityje $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ funkcija f nėra mažėjanti, nes pvz. $x_1 = -1 \in D_f$, $x_2 = 1 \in D_f$, $x_1 < x_2$, tačiau $f(x_1) < f(x_2)$, t. y. 1 apibrėžimo sąlyga mažėjančiai funkcijai negalioja. Kitas būdas yra pasinaudoti a) dalies atsakymu ir pastebėti, kad $D_f \notin 2^{(-\infty,0)} \cup 2^{(0,\infty)}$.

Šis pavyzdys yra ypač įdomus tuo, kad čia turime atvejį, kai $\forall x \in D_f : f'(x) < 0$, tačiau aibėje D_f funkcija f nėra mažėjanti.

6 Ar funkcija gali būti didėjanti taške?

Funkcijos didėjimas ar nedidėjimas taške priklauso nuo to, kokios aibės atžvilgiu yra nagrinėjamas funkcijos kitimas. Pvz. funkcija

$$f(x) = (x+1)(5-x)$$

aibėje $(-\infty, 2]$ yra didėjanti, todėl galima būtų laikyti, kad pvz. taške $x = 1$ funkcija f yra didėjanti. Tačiau ši funkcija aibėje $\{1, 4\}$ yra mažėjanti, todėl galima būtų laikyti, kad taške $x = 1$ funkcija f yra mažėjanti.

Šis neatitikimas rodo, kad funkcijos didėjimo taške klausimas yra aplamai nekorektiškas, jeigu nenurodyta aibė, kurios atžvilgiu yra nagrinėjamas funkcijos kitimas. Todėl galima būtų įvesti tokį apibrėžimą (jo nepavyko rasti šaltiniuose).

3 apibrėžimas. Tarkime, kad $A \subset D_f \subset \mathbb{R}$. Funkcija f vadinama *didėjančia taške* $x \in A$ *aibės* A *atžvilgiu*, jei funkcija f yra didėjanti aibėje A.

Analogiškai apibrėžtume funkcijos mažėjimą, nemažėjimą ir nedidėjimą taške.

Dabar galėtume paaiškinti kodėl pvz. funkcija

$$f(x) = (x+1)(5-x) \tag{5}$$

taške $x = 2$ gali būti vienu metu didėjanti ir mažėjanti taške. Būtent, funkcija f yra didėjanti taške $x = 2$ pvz. aibės $(-\infty, 2]$ atžvilgiu ir yra mažėjanti taške $x = 2$ pvz. aibės $[2, \infty)$ atžvilgiu.

Tačiau kai kurie autoriai didėjimą taške apibrėžia taip [3, p. 205], [14, p. 217]:

4 apibrėžimas. Funkcija f yra didėjanti taške x_0, jei egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad \text{ir} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) < f(x).$$

Analogiškai apibrėžiama funkcija, mažėjanti taške.

Ryšys tarp 3 ir 4 apibrėžimų yra toks:

1) jei f yra didėjanti taške pagal 4 apibrėžimą, tai f yra didėjanti taške ir pagal 3 apibrėžimą, pvz. aibės $A = \{x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}\}$ atžvilgiu (netgi aibės $A = \{x_0\}$ atžvilgiu, bet ji neįdomi);
2) jei f nėra didėjanti taške pagal 4 apibrėžimą, tai ji nėra didėjanti taške ir pagal 3 apibrėžimą, pvz. aibės $A = \{a, x_0, b\}$ atžvilgiu, kur $a < x_0$ ir $b > x_0$ yra tokie, kad $f(a) \geqslant f(x_0)$ arba $f(x_0) \geqslant f(b)$ (jei tokie a ir b neegzistuotų, tai f būtų didėjanti taške pagal 4 apibrėžimą).

Pagal 4 apibrėžimą funkcija (5) nėra didėjanti (ar mažėjanti) taške $x = 2$. Tą patį atsakymą gauname ir 3 apibrėžimo prasme, pvz. aibės $A = \{1, 2, 3\}$ atžvilgiu.

O kaip dėl išvestinės panaudojimo, jei ji egzistuoja?

Jeigu $f'(x_0) > 0$, tai iš to neišplaukia, kad pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje $A = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ funkcija f bus didėjanti aibėje A, nes egzistuoja funkcijos, kurios yra diferencijuojamos visur, tačiau jokiame intervale nėra monotoninės [5, 17].

Tačiau pvz. knygoje [3, p. 206] yra įrodytas teiginys, kad jei $f'(x_0) > 0$, tai 4 apibrėžimo prasme funkcija f yra didėjanti taške x_0.

Jeigu $\forall x_0 \in (a, b) : f'(x_0) > 0$, tai funkcija aibėje (a, b) yra didėjanti [12, p. 158] (pastarajam teiginiui funkcijos didėjimo taške sąvoka nereikalinga).

Bet gali būti ir taip, kad $\forall x \in A : f'(x) > 0$, tačiau funkcija aibėje A nėra didėjanti. 5.6 pavyzdyje yra pateiktas analogiškas teiginys: $\forall x \in A : f'(x) < 0$, tačiau funkcija aibėje A nėra mažėjanti.

Šiek tiek plačiau apie visur diferencijuojamas ir jokiame intervale nemonotonines funkcijas

1976 m. C.E. Weil pateikė įdomų įrodymą apie tokių funkcijų egzistavimą naudojant Bero kategorijas [17] (šis 2 puslapių straipsnis yra laisvai prieinamas).

1974 m. Y. Katznelson and K. Stromberg straipsnyje [5] teigiama, kad Köpcke (1889) pateikė pirmąjį tokios funkcijos konstruktyvų pavyzdį, o patys [5] straipsnio autoriai sukonstravo anot jų žymiai paprastesnį pavyzdį, kurį pabandysime plačiau aptarti. Pateiksime minėtame straipsnyje įrodytą teoremą ir išvadą iš tos teoremos (teoremos įrodymui naudojamos 5 lemos, kurių nepateiksime).

3 teorema. *Tarkime, kad $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ir $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ yra nesikertantys skaitieji aibės $\mathbb{R}$ poaibiai. Tuomet egzistuoja visur diferencijuojama funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kuri tenkina sąlygas*:

1. $\forall j : F'(\alpha_j) = 1, F'(\beta_j) < 1,$
2. $\forall x : 0 < F'(x) \leqslant 1.$

Pati 3 teoremoje esančios funkcijos F konstrukcija yra pateikta lemose ir yra tokia (sąlygos, kurias turi tenkinti parametrai, yra pateiktos [5]):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \psi_n(t)\, dt,$$

kur

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{m_n} c_j \bigl(1 + |\lambda_j(x - \alpha_j)|\bigr)^{-\frac{1}{2}}.$$

3 išvada. *Egzistuoja visur diferencijuojama funkcija $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tokia, kad ji jokiame intervale (turinčiame daugiau kaip 1 elementą) nėra monotoninė ir H' yra aprėžta.*

Įrodymas. Tarkime, kad $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ir $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ yra nesikertantys skaitieji ir visur tiršti aibės $\mathbb{R}$ poaibiai. Remiantis 3 teorema egzistuoja visur diferencijuojamos funkcijos funkcijos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tokios, kad

$$F'(\alpha_j) = G'(\beta_j) = 1, \quad G'(\alpha_j) < 1, F'(\beta_j) < 1,$$
$$0 < F'(x) \leqslant 1, \quad 0 < G'(x) \leqslant 1$$

su visais j ir x. Imkime $H = F - G$, tuomet

$$H'(\alpha_j) > 0, \quad H'(\beta_j) < 0,$$
$$-1 < H'(x) < 1$$

su visais j ir x. Kadangi aibės $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ir $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ yra visur tirštos aibėje $\mathbb{R}$, tai H negali būti jokiame intervale, turinčiame daugiau kaip 1 elementą, monotoninė. $\square$

7 Kas yra funkcijos didėjimo intervalas?

Kai kurie autoriai funkcijos didėjimą apibrėžia tik intervalams. Mokyklose, nustatant funkcijos didėjimą, turimas omenyje funkcijos didėjimo intervalų radimas. Tačiau termino *didėjimo intervalas* tikslaus apibrėžimo literatūroje rasti nepavyko.

Semantikos prasme yra natūralus toks apibrėžimas: jeigu A yra intervalas ir jeigu funkcija aibėje A yra didėjanti, tai A vadinamas *didėjimo intervalu*.

Tačiau toks apibrėžimas nesiderina su tuo, kuris paprastai naudojamas mokykloje, nes pvz. pagal 1 apibrėžimą funkcija (5) yra didėjanti ne tik intervale $(-\infty, 2]$, bet ir intervaluose $(-\infty, 2)$, $(-1, 2]$, $[-3, 0]$ ir t. t. Ar tikrai juos visus galime vadinti didėjimo intervalais? Mokyklose paprastai turimas omenyje „plačiausias“ intervalas (be to, kartais reikalaujama, kad tas intervalas būtų atviras, pvz. [6, p. 179]).

Tačiau kas yra *plačiausias* intervalas, kuriame funkcija didėja? Kvadratinės funkcijos atveju tokį intervalą iš tiesų galime vienareikšmiškai apibrėžti. Pvz. funkcijai (5) toks intervalas yra $(-\infty, 2]$, o jeigu papildomai pareikalausime, kad tai būtų atviras intervalas, tai tuomet atsakymas bus $(-\infty, 2)$.

Bet jeigu nagrinėsime pvz. funkciją

$$f(x) = (x-3)x(x+5)$$

tai gausime du „plačiausius“ intervalus, kuriuose ši funkcija yra didėjanti: $(-\infty, -3]$ ir $(\frac{5}{3}, \infty]$. Šie intervalai yra *vienodai platūs*, nes abu begalinio ilgio. Bet galima pateikti ir baigtinio ilgio vienodų „plačiausių didėjimo intervalų“ pavyzdį. Pvz. funkcijos

$$f(x) = -6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 30x^2$$

išvestinė yra

$$f'(x) = 30(2-x)(x-1)x(x+1)$$

ir todėl funkcija f yra didėjanti „plačiausiuose“ intervaluose $[-1, 0]$ ir $[1, 2]$, bet jie abu yra vienodo ilgio.

Galbūt galima būtų įvesti pvz. terminą *lokaliai plačiausias didėjimo intervalas*. Tuomet tokių intervalų galės būti ne vienas ir jie nebūtinai turės būti vienodo ilgio. Pabandykime pateikti apibrėžimą.

5 apibrėžimas. Jeigu 1) $A \subset D_f$ yra intervalas, 2) funkcija f aibėje A yra didėjanti ir 3) neegzistuoja intervalas $B \subset D_f$ toks, kad $A \subsetneq B$ ir f būtų didėjanti intervale B, tai A vadinamas funkcijos f *lokaliai plačiausiu didėjimo intervalu*.

Funkcijos *lokaliai plačiausius didėjimo intervalus* galime sutrumpintai vadinti funkcijos *didėjimo intervalais.* Turbūt būtent šia prasme mokyklose naudojamas šis terminas.

Tačiau ar didėjimo intervalai turi būti būtinai atviri? Mes galime įvairius apibrėžimus įvedinėti, tačiau jie turi neprieštarauti 1 apibrėžimui.

Būtent, teigti, kad „intervalai, kuriuose funkcija yra didėjanti, mažėjanti ar pastovi, visada yra *atviri*“ [6, p. 179], yra netiesa (tuo jau įsitikinome aukščiau pateiktuose pavyzdžiuose).

Be to, žinomas mokyklinės matematikos specialistas Hung-Hsi Wu savo knygoje įrodo, kad pvz. funkcija $\sin(x)$ intervale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ yra didėjanti [18, p. 90].

8 Apibrėžimų klasifikacija

Kai kurie autoriai vietoje *nemažėjanti* funkcija sako *didėjanti* funkcija, o vietoje *didėjanti* funkcija sako *griežtai didėjanti* funkcija. Analogiška situacija yra ir su *nedidėjančia*, bei *mažėjančia* funkcija. Palyginkime įvairių autorių naudojamus terminus 2 lentelėje:

2 lentelė.

	Autoriai	
	[7, 8, 9, 10, 12, 14]	[2, 4, 11, 13]
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	didėjanti	griežtai didėjanti
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	mažėjanti	griežtai mažėjanti
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	nemažėjanti	didėjanti
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	nedidėjanti	mažėjanti

Dabar suskirstyme autorius pagal tai, kokiai aibei A yra suformuluotas apibrėžimas: 1) intervale, 2) visoje apibrėžimo srityje ar 3) bet kokiame apibrėžimo srities poaibyje (žr. 3 lentelę). Antras ir trečias atvejai nedaug skiriasi, nes jeigu funkcija yra apibrėžta kokioje nors aibėje, tai ji yra apibrėžta ir bet kuriame tos aibės poaibyje, tačiau čia jau būtų nagrinėjama kita funkcija – tos funkcijos *siaurinys*.

3 lentelė.

Autoriai		
[3, 8, 12, 14]	[2, 4, 7, 10, 11, 16]	[9, 13]
Intervale	visoje apibrėžimo srityje	bet kokiame apibrėžimo srities poaibyje

Kai kurie autoriai vietoje $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ rašo $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, tačiau atvejo $x_1 = x_2$ įtraukimas yra perteklinis, nes visada $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Analogiška pastaba yra teisinga ir mažėjančios, nemažėjančios ar nedidėjančios funkcijos atvejais.

Literatūra

[1] V. Bagdonavičius, P. Golokvoščius, R. Kašuba, J. Kubilius, R. Kudžma, K. Giedrytė-Lyndienė, V. Mackevičius, J. Mačys, E. Misevičius, P. Rumšas, B. Svecevičius, P. Vaškas. *Matematikos terminų žodynas.* Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1994.

[2] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, New York, 1999.

[3] V. Iljinas, E. Pozdniakas. *Matematinės analizės pagrindai,* 1 tomas. Mokslas, Vilnius, 1981.

[4] V. Kabaila. *Matematinė analizė,* 1 tomas. Mokslas, Vilnius, 1983.

[5] Y. Katznelson, K. Stromberg. Everywhere differentiable, nowhere monotone, functions. *Amer. Math. Monthly*, **81**(4):349–354, 1974. https://www.jstor.org/stable/2318996.

[6] J. Knyvienė, A. Apynis, I. Brazauskienė, R. Dranseikienė, N. Zdanienė. *Matematika 9,* I dalis. Tempus. Šviesa, 2020.

[7] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. *Elementi teorii funkcij i funkcionalnovo analiza.* Nauka, Maskva, 1981.

[8] J. Kubilius. *Realaus kintamojo funkcijų teorija.* Mintis, Vilnius, 1970.

[9] R. Lapinskas. *Kitokia matematika.* Vilnius, 2023. https://sites.google.com/view/lapinskas.

[10] E. Misevičius. *Matematinė analizė,* 1 tomas. TEV, Vilnius, 1998.

[11] J.S. Ocan. *Sbornik zadač i teorem po teorii funkcij deistvitelnovo peremennovo.* Prosvescenije, Maskva, 1965.

[12] V. Pekarskas. *Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas,* 1 tomas. Technologija, Kaunas, 1996.

[13] H.H. Sohrab. *Basic Real Analysis.* Birkhäuser, New York, 2014.

[14] M. Spivak. *Calculus.* Publish or Perish, Houston, 2008.

[15] D.J. Velleman. *How to Prove It: A Structured Approach.* Cambridge University Press, Cambridge, 2019.

[16] I.M. Vinogradov. *Matematičeskaja enciklopedija,* 3 tom. Sovetskaja enciklopedija, Maskva, 1982.

[17] C.E. Weil. On nowhere monotone functions. *Proc. Am. Math. Soc.*, **56**(1):388–389, 1976. https://www.ams.org/journals/proc/1976-056-01/S0002-9939-1976-0396870-2/S0002-9939-1976-0396870-2.pdf.

[18] H.H. Wu. *Pre-Calculus, Calculus, and Beyond.* American Mathematical Society, Providence, 2020.

SUMMARY

Definition of an increasing function

R. Vilkas

Some nuances of applications of the general definition of an increasing (decreasing, non-decreasing, non-increasing) function are discussed. The question of concern to teachers is answered: can a function be increasing not only on an open interval?

Keywords: increasing function; decreasing function; non-decreasing function; non-increasing function