LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
64 tomas, 2023, 1–15
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33611

Plateau uždavinys ir minimalieji paviršiai: skaitiniai metodai ir taikymai

Mifodijus Sapagovas

Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Vilniaus universitetas

Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius, Lietuva

El. paštas: mifodijus.sapagovas@mif.vu.lt

Įteiktas 2023 lapkričio 9; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Šiame straipsnyje pateikiama minimalaus paviršiaus lygties sprendimo skaitiniais metodais rezultatų apžvalga. Kitas tyrimų uždavinys yra minimalių paviršių taikymas moksle, technologijose, skyrium imant architektūroje. Straipsnis Iliustruotas minimaliųjų paviršių taikymo pavyzdžiais.

Raktiniai žodžiai: Plateau uždavinys; minimaliojo paviršiaus lygtis; skaitiniai metodai; minimaliųjų paviršių taikymai

AMS: 00A66, 00A67

1 Uždavinio formulavimas

Šiame straipsnyje nagrinėjamas minimaliojo paviršiaus lygties kraštinis uždavinys. Matematinė šio uždavinio formuluotė yra tokia: reikia rasti netiesinės elipsinės lygties

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

sprendinį $u = u(x,y)$ uždarojoje srityje $(x,y) \in \Omega$, tenkinantį srities Ω kontūro taškuose $(x,y) \in \partial\Omega$ kraštinę sąlygą

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega;$$

čia pažymėta

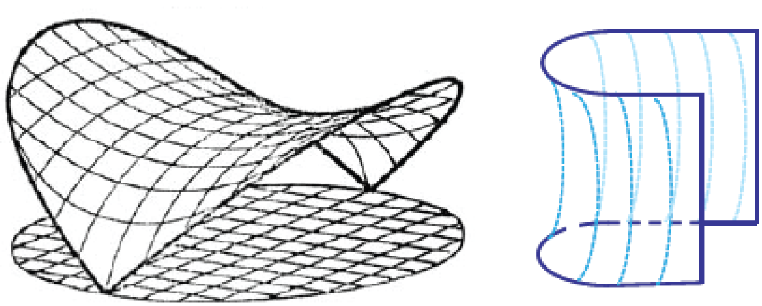
$$\mu(T^2) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2}}, \qquad T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{2}$$

Tai ir yra Plateau[1] uždavinys.

2 Plato uždavinys: istorinė apžvalga

Minimaliojo paviršiaus sąvoka matematikoje atsirado XVIII a. viduryje. 1762 m. Lagrange'as[2], tyrė tokį matematinį uždavinį: rasti mažiausio ploto paviršių, kurį riboja žinoma uždaroji erdvinė kreivė. Jis įrodė, kad jei paviršiaus lygtį galima išreikšti formule $u = u(x, y)$, tai ji ir yra (1) lygties sprendinys. Toks paviršius pavadintas *minimaliuoju*, o (1) lygtis – *minimaliojo paviršiaus lygtimi.*

1770 m. G. Monge'as[3] pastebėjo tokių paviršių, einančių per žinomą kreivę, savybę: jei tokio paviršiaus plotas yra minimalus, tai kiekviename šio paviršiaus taške vidutinis paviršiaus kreivis lygus nuliui. Todėl šiuos paviršius ir pradėta vadinti minimaliaisiais. Taigi paviršius yra minimalusis, jei kiekviename jo taške vidutinis paviršiaus kreivis lygus nuliui. Pastebėsime, kad tokią minimaliojo paviršiaus apibrėžtį galima interpretuoti labai paprastai ir visiems suprantamai: paviršius yra minimalus, jei per kiekvieną jo tašką galima išvesti dvi tokias paviršines kreives, kurios būtų išsilenkusios į priešingas puses. Tik nesupainiokime: tai ne apibrėžtis, tik interpretacija (1 pav., balno pavidalo minimalusis paviršius).



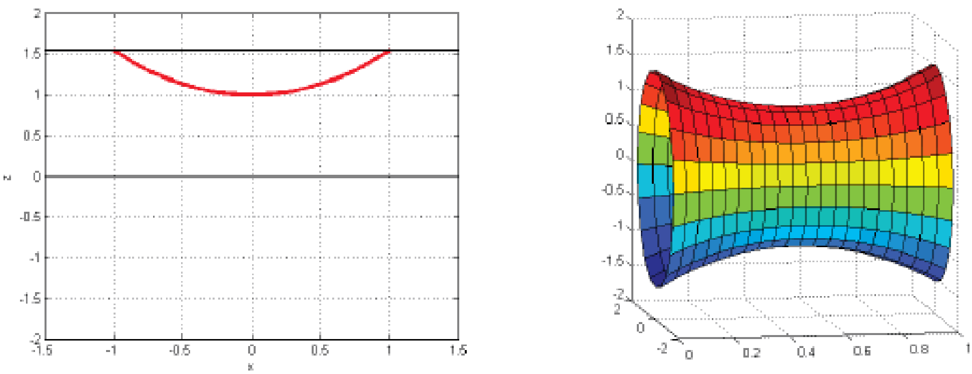
1 pav. Du minimaliųjų paviršių pavyzdžiai: kairėje – balno paviršius, dešinėje – muilo plėvelė ant vielos karkaso.

XVIII–XIX a. minimaliųjų paviršių teoriją kūrė daug žymių matematikų, buvo sukonstruota nemažas pluoštas specifinių minimaliųjų paviršių, pavyzdžiui, katenoidas ar helikoidas. Antai, *grandininę* kreivę

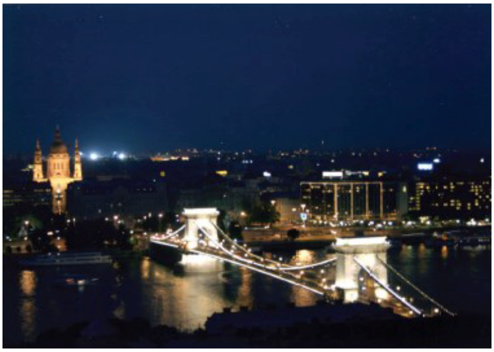
$$y = \alpha \cosh \frac{x}{2}$$

koordinačių plokštumoje sukdami apie Ox ašį gausime minimalųjį paviršių, vadinamą *katenoidu* (2 pav., dešinėje); pakabinus be galo lanksčią stygą (grandinę) tarp dviejų taškų, esančių vienodame aukštyje, styga įgaus grandininės kreivės pavidalą (2 pav., kairėje). Bent du grandininės kreivės pavyzdžius esame matę daugelis iš mūsų – tai paprasčiausia grandinė tarp dviejų stulpelių mieste, užtverianti perėjimą neleistinose

[1] Joseph Plateau (1801–1883).
[2] Joseph-Louis de Lagrange (1736–1813).
[3] Gaspard Monge (1746–1818)



2 pav. Katenoidas. Kairėje – grandininė linija, dešinėje – šios kreivės sukimosi apie Ox ašį rezultatas.



3 pav. Naktinis Budapeštas. Tiltas per Dunojų, jungiantis Budą ir Peštą. Lynai tarp dviejų pagrindinių atramų yra grandininės kreivės formos (autoriaus nuotrauka, 2004 m.).

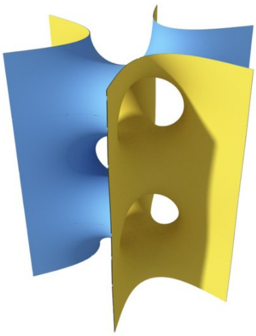
4 pav. Mikalojaus tiltas Kyjive apie 1900 m. https://commons.wikimedia.org/wiki/.

vietose, kabantįjį tiltą laikantis lynas (3, 4 pav.) arba bučius, tinkamas ne tik žuvims ir vėžiams gaudyti, bet ir pasikarstyti pramogų parke (5 pav.). Sudėtingesni minimalieji paviršiai pateikti 6, 7 pav.

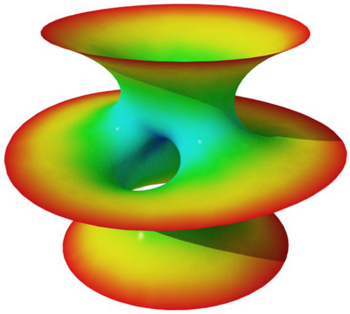
Kitose, nematematinėse, srityse minimaliaisiais paviršiais susidomėta po 1849 m. vykdytų J. Plato eksperimentų su muilo plėvele. Nagrinėdamas minimaliųjų paviršių susidarymą, J. Plato atliko labai paprastą bandymą: panardinęs erdvinį (ne plokščią) vielos karkasą į muilo tirpalą pastebėjo, kad ant karkaso susidaro muilo plėvelė, kurios formą lemia tik paviršiaus įtempties jėga. Šis paviršius ir yra idealus minimalusis paviršius.

J. Plato dar pastebėjo, kad nelygu vielos sulankstymas, gali susidaryti daugiau negu vienas minimalusis paviršius. Diferencialinių lygčių terminais tai reiškia, kad priklausomai nuo elipsinės lygties kraštinių sąlygų gali būti keli minimalieji paviršiai. J. Plato eksperimentų įtaka minimaliųjų paviršių teorijai buvo tokia didelė, kad minimaliojo paviršiaus nustatymo pagal žinomą kontūrą uždavinys imtas vadinti Plato vardu.

5 pav. Kliučių ruožas Vaski nuotykių saloje šalia Turku. Iš autoriaus nuotraukų rinkinio, 2023 m.



6 pav. Dviperiodis trisparnis Karcherio balno minimalusis paviršius https://commons.wikimedia.org/wiki/File



7 pav. Costa'os minimalusis paviršius https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Costa.

Dar viena pastaba apie minimaliojo paviršiaus lygtį. XVIII–XIX a. keletą kartų bandyta rasti minimaliojo paviršiaus su įvairiais erdvinės kreivės pavidalais lygties sprendinį. Paminėtinos K. Weierstrasso[4] (1866 m.) ir G. Monge'o (1776 m.) sudarytos sprendinio formulės, tačiau visuotinai manyta, kad jos praktiškai nepritaikomos. Taigi rasti priimtiną minimaliojo paviršiaus sprendinį tuo metu nepavyko.

Jei nepavyksta rasti diferencialinio uždavinio sprendinio tinkamu pavidalu, anksčiau ar vėliau šis uždavinys imamas spręsti skaitiniais metodais. Kitaip tariant, pradedami kurti ir nagrinėti apytikslio sprendinio apskaičiavimo metodai.

[4] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

3 Plateau uždavinys: skaitiniai sprendimo metodai

Vienas pirmųjų darbų, gal būt, pirmasis, kuriame aiškinamas minimaliojo paviršiaus lygties sprendimas, yra JAV matematiko J. Douglaso[5] straipsnis [6]. J. Douglasas, vienas žymiausių 20 amžiaus minimaliųjų paviršių tyrėjų, 1936 m. už šiuos darbus gavo aukščiausią tarptautinį matematikų apdovanojimą – Fieldso medalį. Praėjus keliems dešimtmečiams, minimaliojo paviršiaus lygtį sprendė jau keletas autorių [1, 5, 9, 11].

Verta pastebėti, kad įvairioms diferencialinėms lytims spręsti populiariausias skaitinis metodas yra baigtinių skirtumų metodas. XX amžiaus trečiajame dešimtmetyje, kai dar tik formavosi bendroji baigtinių skirtumų metodų teorija, minimaliojo paviršiaus lygtis šiems metodams dar buvo neįkandama. Nenuostabu, kad kitos mokslinės publikacijos apie minimaliojo paviršiaus lygties sprendimą skaitiniais metodais pasirodė tik praėjus 30-iai metų: tuo metu net keletas autorių, nepriklausomai vienas nuo kito, ėmėsi įvairiais metodais nagrinėti šį svarbų uždavinį [1, 5, 9, 11, 16, 20].

Pateiksime pagrindines minimaliojo paviršiaus lygties sprendimo baigtinių skirtumų metodu gaires ir aptarsime sprendimo metodo ypatumus.

Pradėdami taikyti baigtinių skirtumų metodą (1)–(2) kraštiniam uždaviniui, pirmiausia trumpam tarsime, kad sritis Ω yra stačiakampis

$$\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant \alpha;\ 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Pažymėkime $h_1 = a/N_1$, $h_2 = b/N_2$, čia N_1 ir N_2 – sveikieji skaičiai. Sudarykime dvi srities Ω taškų aibes:

1) vidinių taškų aibę

$$\Omega_h = \left\{(x_i, y_j) \,\middle|\, i = \overline{1, N_1 - 1};\ j = \overline{1, N_2 - 1}\right\};$$

2) kontūrinių taškų aibę

$$\partial\Omega_h = \left\{(x_i, y_j) \,\middle|\, (i = 0, N_1; j = \overline{0, N_2}) \text{ ir } (i = \overline{0, N_1}; j = 0, N_2)\right\}.$$

Šiuose taškuose (1)–(2) diferencialinį uždavinį pakeisime baigtinių skirtumų (trumpiau –skirtuminiu) uždaviniu:

$$\delta_x\big(\mu(T_{ij}^2)\delta_{\bar{x}}u_{ij}\big) + \delta_y\big(\mu(T_{ij}^2)\delta_{\bar{y}}u_{ij}\big) = 0 \quad (i,j) \in \Omega_h, \tag{3}$$

$$u_{ij} = \varphi_{ij}, \quad (i,j) \in \partial\Omega_h, \tag{4}$$

čia pažymėjome

$$\delta_{\bar{x}}u_{ij} = \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_1}, \qquad \delta_{\bar{y}}u_{ij} = \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_2},$$

$$\delta_x u_{ij} = \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1}, \qquad \delta_y u_{ij} = \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_2},$$

$$T_{ij}^2 = (\delta_{\bar{x}}u_{ij})^2 + (\delta_{\bar{y}}u_{ij})^2.$$

[5] Jesse Douglas (1897–1965).

Netiesinių skirtuminių lygčių sistemos (3)–(4) nežinomieji u_{ij} yra (1)–(2) diferencialinio uždavinio sprendinio $u(x,y)$ apytikslės reikšmės taškuose (x_i,y_j):

$$u_{ij} \approx u(x_i,y_j).$$

Ši netiesinių skirtuminių lygčių sistema sprendžiama kuriuo nors iteraciniu metodu [1, 5, 9, 11].

Nurodysime pagrindinius sunkumus, kylančius sprendžiant Plato uždavinį baigtinių skirtumų ar kitais skaitiniais metodais.

Pirma, (3) lygtis taške (x_i,y_j) sudaroma naudojantis u_{ij} reikšmėmis septyniuose vidiniuose srities Ω_h ir jos kontūro $\partial\Omega_h$ taškuose. Jei sritis Ω_h nėra stačiakampė, kai kurie iš šių septynių taškų gali nepriklausyti sričiai Ω, todėl dalis (3)–(4) sistemos lygčių turi būti sudaromos kitaip, pavyzdžiui, naudojantis netolygiuoju tinklu. Tačiau tuo pabloginamos sistemos savybės.

Antra, užrašę (1) lygtį pavidalu

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\big(a_1(p_1,p_2)\big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\big(a_2(p_1,p_2)\big)=0, \tag{5}$$

gausime nelygybę

$$\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial a_1}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2, \tag{6}$$

čia

$$\alpha=(1+T^2)^{-3/2}. \tag{7}$$

Iš (7) lygybės matyti, kad tuo atveju, kai bent viename paviršiaus taške $\partial u/\partial x$ arba $\partial u/\partial y$ yra neaprėžta, tai $\alpha=0$. Tačiau tai yra visiškai natūrali minimaliojo paviršiaus atveju savybė: bent viena dalinė išvestinė bent viename minimaliojo paviršiaus taške yra neaprėžta. Todėl (6) nelygybėje parametro α reikšmės apibrėžiamos negriežtąja nelygybe $\alpha\geqslant 0$ (bet ne $\alpha>0$). Tai rodo, kad minimaliojo paviršiaus lygtis yra elipsinė, bet nėra tolygiai elipsinė. Tačiau bendruoju atveju elipsinių lygčių skirtuminių schemų ir iteracinių metodų konvergavimo įrodymas grindžiamas sąlyga $\alpha>0$.

Trečia, (1) lygtimi reiškiama tik labai maža dalis minimaliųjų paviršių, tik tie, kurie apibrėžiami lygtimi $u=u(x,y)$, tačiau daugelis sudėtingų minimaliųjų paviršių reiškiami tik parametrinėmis lygtimis.

Šie ir kiti sprendimo sunkumai skatina Plato uždaviniui taikyti skaitinius metodus. Įvairūs metodai ir priemonės, kurias pasitelkia daugelio straipsnių autoriai, plečia ir gilina Plato uždavinio skaitinių metodų teoriją. Nemažai autorių, kurdami ar modifikuodami skaitinius metodus netiesinėms diferencialinėms lygtims spręsti, laiko garbės reikalu savo metodu išspręsti minimaliojo paviršiaus lygtį.

Jau XX-ojo amžiaus pabaigoje buvo sukurta ir išnagrinėta nemažai skaitinių metodų, tinkamų Plato uždaviniui, tačiau tik šio, XXI-ojo amžiaus pradžioje šių skaitinių metodų skaičius ėmė sparčiai didėti [10, 13, 17, 19]. Priežastis visiškai aiški: minimaliojo paviršiaus lygtis imta vis dažniau taikyti įvairiuose praktiniuose matematinio modeliavimo uždaviniuose.

Greta minimaliojo paviršiaus lygties, plačiai nagrinėjama ir kita, jai artima lygtis:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=H(x,y,u). \tag{8}$$

prie kurios prijungus Neumanno[6] kraštinę sąlygą, gaunamas kapiliarumo uždavinys. Funkcija $H(x,y,u)$ yra vidutinis kreivis paviršiaus taške. Vienas iš šio uždavinio sprendimo metodų pateikiamas [15, 20] straipsniuose.

Kapiliarumu vadinami reiškiniai ar procesai, susiję su skysčio paviršiaus įtemptimi kietojo kūno, skysčio ir dujų sąlyčio riboje. Šių procesų veikiamas skysčio paviršius smarkiai deformuojamas (iškreivinamas), skysčio meniskas pasidaro įgaubtas arba iškilas. Veikiant skysčio paviršiaus įtempties jėgai, skystis užima mažiausią tūrį (mažiausią paviršiaus plotą, sukaupia mažiausią laisvąją energiją). Ši skysčių savybė ir rodo glaudų kapiliarumo ryšį su minimaliaisiais paviršiais. Matematiniu požiūriu šiuos uždavinius sieja vienas bruožas: diferencialinė lygtis yra netiesinė ir netolygiai elipsinė, o jos koeficientai priklauso nuo sprendinio gradiento.

Vidutinio kreivio lygtis (8) sutinkama ir vibrotechnikos uždaviniuose [14], pavyzdžiui, projektuojant magnetinės sąveikos jėgų valdomų skysto metalo kontaktus (jungiklius). Tokie kontaktai turi daug privalumų: jų aukšta veikimo sparta, yra patikimi, atsparūs vibracijai, ilgaamžiai, perjungimo varža maža ir stabili. Be to, juos paprasta jungti su įvairiais automatikos elementais. Tokių kontaktų konstravimas grindžiamas keliais principas; vienas iš jų – berezervuariai kontaktai, patikimai veikiantys bet kurioje erdvinėje padėtyje. Sujungtas kontaktas šiuo atveju yra skysto metalo (pvz., gyvsidabrio) „tiltelis“ tarp dviejų plokštumų, o išjungtas – du lašai, prilipę prie skirtingų plokštumų. Abiem atvejais lašo laisvasis paviršius nustatomas išsprendus kraštinį netiesinės diferencialinės lygties uždavinį. Diferencialinė lygtis sudaroma remiantis bendrosios energijos (skysčio paviršiaus įtempties energijos ir traukos jėgos potencinės energijos sumos) minimumo principu.

Viena pastaba. Kartais keliamas klausimas, ar sfera yra minimalusis paviršius? Sfera yra tam tikro vidutinio kreivio paviršius, todėl ji yra (8) lygties sprendinys, taigi sfera nėra minimalusis paviršius. Muilo plėvelėmis galima sukurti įvairiausius minimaliuosius paviršius, o muilo burbulais – apibrėžto vidutinio kreivio paviršius. Taigi muilo burbulai taip pat yra sudėtingas mokslo tyrimų objektas, tik netelpantis į šio straipsnio rėmus. Beje, pasitelkdami muilo burbulų teoriją architektai kuria patrauklius pastatus.

4 Minimaliųjų paviršių taikymai

XVIII–XIX a. minimalieji paviršiai buvo naudojami kaip daugelio matematikos šakų – geometrijos, topologijos, diferencialinių lygčių teorijos, valdymo teorijos, matematinės fizikos ir kitų sričių tyrimo objektas, o kartais ir kaip tyrimų metodas. XX a. antroje pusėje suintensyvėjo minimaliųjų paviršių taikymas fizikos, chemijos, biologijos ir technologiniuose uždaviniuose. Bene sparčiausiai minimalieji paviršiai skverbėsi į architektūros ir dizaino praktiką.

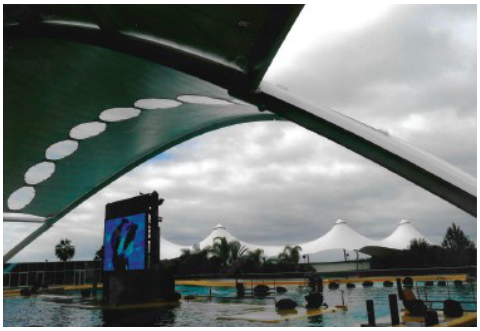
Architektūroje minimalieji paviršiai sietini su minimalizmo formų raiška. Minimalizmas, kilęs XX a. septintajame dešimtmetyje, yra meno kryptis, kuriai būdingas

[6] John von Neumann (1903–1957).

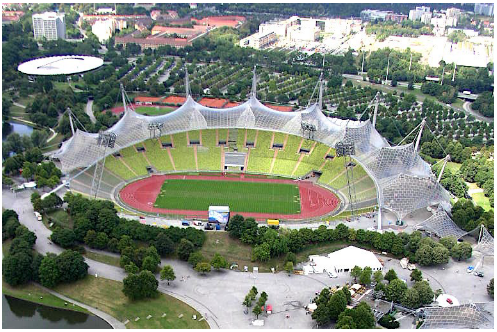
racionalumas, supaprastintos, dažnai – geometrizuotos lengvos formos ir išryškintos kūrinio struktūros. Minimalizmas turėjo įtakos ir instaliacijų menui – erdvinėms struktūroms, įtraukiančioms žiūrovus, atsirasti.

Įsigalint minimalizmo tendencijoms (nuo XX amžiaus 7-ojo dešimtmečio), architektūroje plinta ir minimalieji paviršiai, kurį lėmė kelios priežastys. Pirmoji ir akivaizdi priežastis – mažiausio ploto paviršiui reikia mažiausia medžiagų. Sutinku su prieštaraujančiais, kad tai matyt, nėra pati svarbiausia paskata. Antra priežastis, technologiniu požiūriu žymiai svarbesnė, yra ta, kad dėl vienodo vidutinio kreivio kiekviename minimaliojo paviršiaus taške mechaninės įtampos yra vienodos, t. y. nėra kritinių taškų, kuriuose įtampos būtų didesnės, palyginti su kitais stogo taškais. Dėl trečiosios priežasties sunku ginčytis: minimaliųjų paviršių formos yra labai patrauklios.

Vokiečių architektas O. Frei'us[7] – vienas pirmųjų pasaulio architektų, sėkmingai pradėjusių taikyti minimaliųjų paviršių formas architektūroje. Jo sukurtas Vokietijos Federacinės Respublikos paviljonas EXPO-67 parodoje Monrealyje (Kanadoje) daugeliui meno gerbėjų tapo pirmuoju įsimintinu naujos architektūrinės krypties pavyzdžiu. Po kelerių metų pasirodė naujas O. Frei'aus architektūrinis šedevras – Miuncheno olimpinis stadionas (1972 m., 9 pav.). Pabrėžtina, kad O. Frei'us nuolat domėjosi lengvų konstrukcijų projektavimu ir savo idėjas įgyvendino paties įkurtame Lengvųjų konstrukcijų institute Štutgarte.



8 pav. Loro parkas Tenerifės saloje. Iš autoriaus nuotraukų kolekcijos, 2008 m.



9 pav. Miuncheno olimpinis stadionas. Architektas O. Frei, 1972. Foto: Dave Morris iš Edinburgo, JK. https://commons.wikimedia.org/wiki/File.

Kalbėdami apie O. Frei'aus kūrybą, trumpam grįžkime prie architektūros minimalizmo krypties. Minimalizmui išsivadavus iš griežtų geometrinių rėmų ir perėjus prie šiuolaikinių technologijų, pakito formos suvokimas, o tolesnę minimalizmo raidą ėmė veikti konceptualaus virtualiojo modeliavimo teikiamos galimybės. Paklusdamas šioms tendencijoms, O. Frei'us naujoms formoms kurti pradėjo taikyti ne tik J. Plateau modeliavimo metodą (vielos karkaso nardinimą į muilo tirpalą), bet ir antrą šiuolaikinę galimybę – minimaliojo paviršiaus lygties spendimą kompiuteriu: naujoms architektūros formos kurti pasitelktas talentingas skaitinių metodų specialistas J.H. Argyris[8], su superkompiuteriu sprendęs netiesines diferencialines lygtis.

[7] Otto Frei (1925–2015).
[8] Johann Hadji Argyris (1913–2004).

Štai tokios yra naujų architektūros šedevrų gimimo aplinkybės. Plačiau O. Frei'aus architektūrinės idėjos aprašytos [7, 8, 18] ir kitose knygose.

Ispanų ir meksikiečių architektas F. Candela[9] suprojektavo keliasdešimt restoranų ir kitos paskirties pastatų (daugiausia Meksikoje ir Ispanijoje), kurių minimaliojo paviršiaus formos stogas primena šešialapį dobilą (10 pav.).

10 pav. Minimaliojo paviršiaus šešialapio dobilo formos pastatas Valensijoje "Valensia L'Oceanografic". Architektas F. Candela. Foto: F. Gabaldón, 2010. https://commons.wikimedia.org/w.

11 pav. Svarovskio krištolo mužiejus prie Insbruko. Autoriaus nuotrauka, 1998 m.

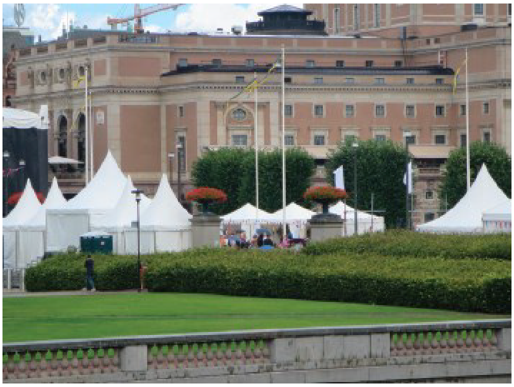
Šiandien daugelyje Vakarų Europos miestų gana daug stacionarių architektūrinių objektų su lengvų minimaliojo paviršiaus konstrukcijų perdangomis. Tai oro uostų pastatai, muziejai, sporto salės (11 pav.). Yra ir laikinų paviljonų, skirtų įvairiems renginiams, lauko kavinėms ir koncertams (12, 14, 16 pav.). Kanarų salose minimalieji paviršiai gražiai dera su delfinariumo baseinais (8 pav.).

12 pav. Akcija neįgaliesiems remti. Viena, miesto centras. Autoriaus nuotrauka, 1998 m.

13 pav. Vilniaus Vingio parko estrada – klasikinis minimaliųjų paviršių architektūroje pavyzdys. Autoriaus nuotrauka, 2009 m.

Lietuvoje taip pat nemaža statinių su minimaliųjų paviršių elementais. Visiems gerai žinomos Vingio parko estrados stogas yra beveik tikslus klasikinis minimalusis paviršius (13 pav.). Estrada pastatyta 1960 metais pagal estų architektų A. Kotli'o,

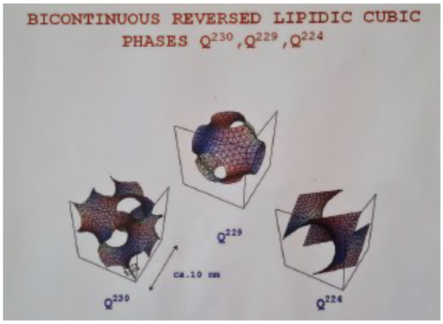
[9] Félix Candela (1910–1997).



14 pav. Stokholmas. Mugė prie Karalių rūmų. Iš autoriaus nuotraukų rinkinio, 2021 m.

15 pav. Aušinimo bokštas Vestfalijoje, Vokietijoje. Dalies cilindrinio paviršiaus pakeitimas minimaliuoju didina bokšto atsparą vėjui. https://commons.wikimedia.org/w.

16 pav. Vilnius, Vokiečių g. Vasaros sezonui sumontuojamos kavinukių perdangos. Autoriaus nuotrauka, 2009 m.



17 pav. Minimaliųjų paviršių formos lipiduose. Prof. V. Razumas (LMA Biochemijos institutas). Iš autoriaus nuotraukų rinkinių, 2009 m.

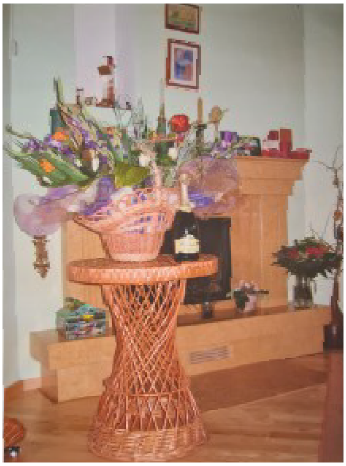
H. Seppmanno[10] projektą, kuris kiek anksčiau buvo įgyvendintas Taline. Šio pastato perdanga nėra tikslus minimalusis paviršius, tačiau pagal daugelį požymių jam artimas. Deja, nepavyko rasti jokių duomenų apie tai, ar autoriai projektą kūrė kaip minimalųjį paviršių, ar tai buvo tik sutapimas.

Lietuvoje dekoratyvių minimaliojo paviršiaus formos perdangų pastaraisiais metais atsirado Vilniuje ir Palangoje. Daugiausia tai sezoniniai kavinių paviljonai. Iš stacionarių pastatų reikėtų atskirai paminėti Palangos Menų ir pramogų klubą „Kupeta“, kurią sukūrė ir pastatė UAB „Vingida“ (https://www.vingida.lt/stogai_vasaros_lauko_kavines.html).

Praėjusio amžiaus septintajame dešimtmetyje minimaliųjų paviršių perdangomis susidomėjo Kijevo statybos inžinerijos instituto architektai ir inžinieriai, tačiau jie neturėjo skaitinių metodų specialistų minimaliojo paviršiaus lygčiai spręsti. Tuo tiks-

[10] Alar Kotli (1904–1963), Henno Sepmann (1925–1985).

18 pav. Erdvinė lentyna „Exept“. Dizaineris P. Gasūnas. Litexpo paroda. Autoriaus nuotrauka, 1998 m.

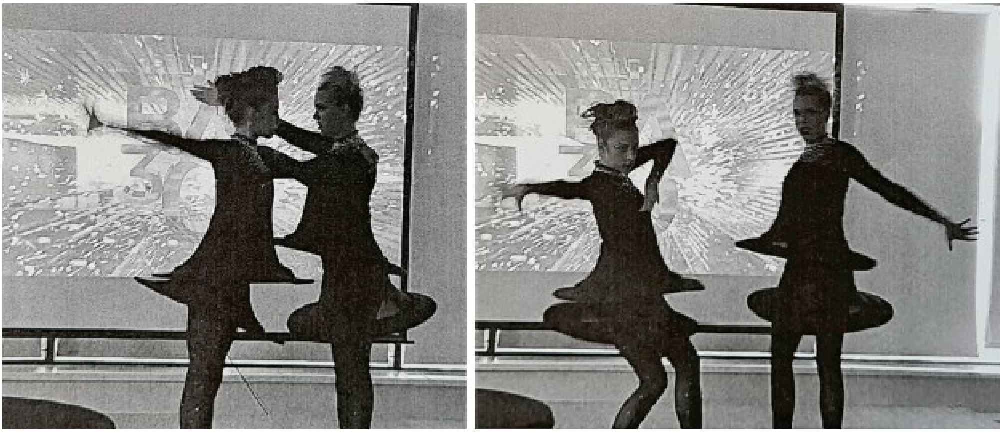


19 pav. Gėlių staliukas. Autoriaus nuotrauka, 2009 m.

20 pav. Kavos puodeliai, dekoruoti architektūriniais minimaliųjų paviršių objektais. Autoriaus nuotrauka, 2019 m.

21 pav. Musulmonų šventyklos Haram Piazza skėčiai Medinoje, Saudo Arabijoje. https://commons.wikimedia.org/wiki/File.

lu Kijevo inžinieriai pasiūlė Lietuvos MA Fizikos ir matematikos instituto Skaitinių metodų skyriui (M. Sapagovui, G. Kairytei, D. Sapagovienei, T. Veidaitei) bendradarbiauti projektuojant pastatus su minimaliojo paviršiaus perdangomis. Architektūros terminais kalbant, Lietuvos matematikai vykdė virtualųjį pastatų konstrukcijų modeliavimą. Kijeve ir Čerkasuose (ten buvo Kijevo statybos inžinierių instituto filialas) architektai suplanuodavo galimus minimaliųjų paviršių kontūrus (apibrėždavo sritis, kuriose turėjo būti sprendžiama diferencialinė lygtis ir nurodydavo galimas kraštines sąlygas), o Vilniuje matematikai sprendė minimaliojo paviršiaus lygtį. Šitaip drauge išanalizuota daug minimaliųjų paviršių variantų (23, 24 pav.). Manytina, kad Kijevo architektai ir inžinieriai, žinodami O. Frei‘aus ir F. Candelos darbus, siekė pakartoti ir patobulinti jų gautus rezultatus, o Lietuvos matematikams tai buvo vertinga patirtis priartėti prie realių taikomųjų uždavinių.



22 pav. Minimaliųjų paviršių dizaino choreografiniai drabužiai. Nuotrauka iš informacinių technologijų bendrovės „Baltic Amadeus“ šventinio koncerto. Iš autoriaus nuotraukų rinkinio, 2018 m.

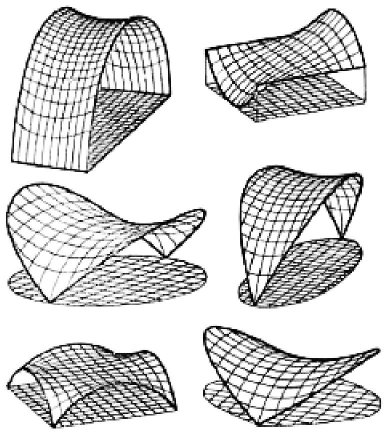
Lietuvos biochemikai įmantrias minimaliųjų paviršių formas taiko skysčio paviršiaus procesams ir reiškiniams tirti (17 pav.). Prof. Juozo Burneikos (1929–2016) knygoje nemažai dėmesio skiriama minimaliųjų paviršių vaidmeniui dailėje [4].

Mokslo ir meno pasaulyje kartkartėmis atsiranda kūrėjų, kurie įkvėpti minimaliųjų paviršių paslapčių ir grožio, tampa tikrais minimaliųjų paviršių entuziastais. Vieną iš jų – vokiečių architektą O. Frei'ų trumpai jau minėjome. Jo mokinio B. Rascho[11] suprojektuota mečetė, kurioje gausu filosofiškai įprasmintų minimaliųjų paviršių formų, praeito amžiaus pabaigoje pastatyta Medinoje, Saudo Arabijoje.

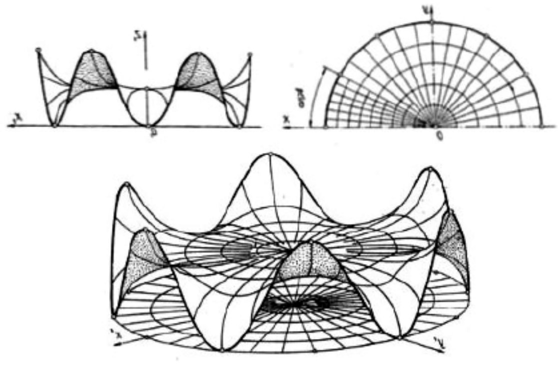
Kitas minimaliųjų paviršių aistruolis yra Maskvos Lomonosovo universiteto profesorius, geometras Anatolijus Fomenka[12], kelių knygų apie geometriją ir topologiją autorius, gavęs vertingų teorinių rezultatų apie minimaliuosius paviršius, išsprendęs daugiamatį Plateau uždavinį. Talentingas ir originalus dailininkas, piešia realistinių ir fantastinių formų paveikslus, iliustruoja knygas, o fantastiniais minimaliaisiais paviršiais iliustruoja geometrijos teoremų įrodymus.

Paminėtini ir du Lietuvos mokslo ir meno atstovai, palikę ryškų pėdsaką minimaliųjų paviršių istorijoje, kurią kūrė drauge su daugelio šalių ir profesijų atstovais. Vienas jų – matematikas, Vilniaus universiteto profesorius Algirdas Ambrazevičius (1952–2023). Gimęs ir augęs Vilniuje, Algirdas dar vidurinėje mokykloje pamėgo matematiką, dalyvavo matematikos olimpiadose. 1971 metais baigęs vidurinę mokyklą, įstojo į Vilniaus universitetą studijuoti matematikos, o nuo trečio kurso studijas tęsė Leningrado (Sankt Peterburgo) universitete. Vadovaujamas žymios minimaliųjų paviršių specialistės profesorės N. Uralcevos[13], Algirdas parengė ir 1981 m. apgynė kandidato (daktaro) disertaciją „Kapiliarumo uždaviniai kūginėse srityse“. Vėliau, nagrinėdamas įvairių tipų minimaliųjų paviršių lygtis bei medžiagų paviršinių reakcijų matematinius modelius, gavo naujų gilių teorinių rezultatų [2, 3].

[11] Bodo Rasch, g. 1943 m.
[12] Anatoly Fomenko, g. 1945.
[13] Nina Uraltseva, g. 1934.



23 pav. Kijevo ir Vilniaus mokslininkų bei inžinierių suprojektuotos minimaliųjų paviršių formos perdangos, 1967–1970 m.



24 pav. Dar vienas Lietuvos matematikų ir Kijevo inžinierių bendro darbo pavyzdys – šešialapis dobilas.

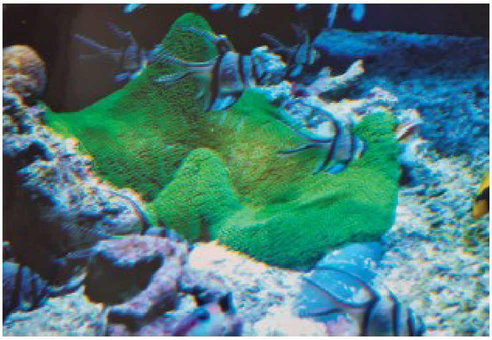
Minimalizmo principais vadovaudamasi Lietuvą garsino ir Amerikos lietuvė Aleksandra Kašubienė (Kasuba). Skulptorė, keramikė, architektė, menininkė Aleksandra Fledžinskaitė-Kašubienė gimė 1923 m. sausio mėn. 10 d. Ginkūnuose, Šiaulių apskrityje. Jos senelis ir proseneliai yra garsios Šiaulių krašto giminės – grafų Zubovų atstovai. Aleksandra ir užaugo grafams Zubovams priklausiusiame Ginkūnų dvare. Baigusi mokslus Lietuvoje (Kauno ir Vilniaus Dailės akademijose), A. Kašubienė 1944 m. pasitraukė į Vokietiją, o 1947 m. persikėlė į Niujorką.

Greta monumentaliosios kūrybos, A. Kašubienė minimalizmo principus įkūnijo ir abstrakčiose tampraus sintetinio audinio instaliacijose, kurias kurti menininkę skatino minimaliųjų paviršių teorija ir kompiuterinės technologijos. Menotyrininkai teigia, kad A. Kašubienės minimalizmas įtraukia žiūrovą ir sukuria vientisą plastinę bei prasminę instaliacijos visumą.

A. Kašubienė, eksperimentuodama su standžiomis įtemptomis membranomis ir naudodama tamprias medžiagas, aptemptas ant erdvinio kontūro, matematine prasme modeliavo minimaliuosius paviršius ir dalį kūrinių sukūrė vadovaudamasi tokia metodika: pagal menininkės pasirinktą kontūrą skaitinių metodų specialistai D. Hoffman, J. Hoffman ir W. Meels, išsprendę minimaliojo paviršiaus lygtį, kompiuterio ekrane pateikdavo spalvotą dvimatį sprendinio vaizdą, pagal kurį menininkė sukurdavo erdvines paviršių konfigūracijas. Tai plačiai buvo aprašyta „The New York Times“ žurnale 1986 m. rugpjūčio 24 d. [12].

Paskutiniais gyvenimo metais A. Kašubienė iš didmiesčio grįžo į gamtos prieglobstį ir įgyvendino nuo vaikystės brandintą pastatų be stačių kampų viziją: nusipirkusi sklypą Naujoje Meksikoje, pasistatė Akmenų kalvos gyvenamąjį namą ir svečių studiją su minimaliojo paviršiaus formos stogu. Mirė A. Kašubienė 2019 m. Naujoje Meksikoje.

Terminas „minimalusis paviršius“ yra tik žmogaus sugalvotas konstruktas, teorinė sąvoka, kuri atspindi tai, kas seniai gamtos sukurta. O matematikui, nagrinėjančiam šiuos paviršius, visada malonu pamatyti balno pavidalo moliuskų koloniją akvariume



25 pav. Akvariumas Okeanografijos muziejuje Monake. Iš autoriaus nuotraukų rinkinio, 2008 m.

26 pav. Madeiros archipelago Porto Santo sala. Iš autoriaus nuotraukų rinkinio, 2023 m.

ar kalnų keterą kelionėje ir dar kartą įsitikinti, kad gamtos reiškiniai paklūsta minimalios formos ir energijos dėsniams (25, 26 pav.), o žmogus geba suvokti, ką gamta sukūrė, ir racionaliai papildyti gamtos kūrinius.

Padėka. Autorius dėkoja docentui Vytautui Būdai už vertingą diskusiją minimaliųjų paviršių taikymų klausimais.

Literatūra

[1] A. Agalcev, M. Sapagovas. The solution of the equation of minimal surface by finite-difference method. *Lith. Math. J.*, **7**(3):373–379, 1967 (in Russian). https://doi.org/10.15388/LMJ.1967.19976.

[2] A. Ambrazevičius. Existence and uniqueness theorem to a unimolecular heterogeneous catalytic reaction model. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **15**(4):405–421, 2010. https://doi.org/10.15388/NA.15.4.14312.

[3] A.P. Ambrazevičius. Finding the form of the surface of a liquid in a conical container for a given volume of the liquid. I. *Lith. Math. J.*, **22**(1):1–6, 1991. https://doi.org/10.1007/BF00967921.

[4] J. Burneika. *Forma, kompozicija, dizainas.* VDA leidykla, 2002.

[5] P. Concus. Numerical solution of the minimal surface equation. *Math. Comput.*, **21**(99):340–350, 1967. https://doi.org/10.2307/2003235.

[6] J. Douglas. A method of numerical solution of the problem of Plateau. *Annal. Math.*, **29**(1/4):180–188, 1927-1928. https://doi.org/10.2307/1967991.

[7] P. Drew. *Frei Otto: Form and Structure.* Westview Press, 1976.

[8] O. Frei, B. Rasch. *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal.* Axel Menges, 1996.

[9] D. Greenspan. On approximating extremals of functionals. I. The method and examples for boundary value problems. *IBB Bull.*, **4**:99–120, 1965.

[10] H. Halbrecht. On the numerical solution of Plateau's problem. *Appl. Numer. Math.*, **59**(11):2785–2800, 2009. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2008.12.028.

[11] C. Johnson, V. Thomée. Error estimation for a finite element approximation of a minimal surface. *Math. Comput.*, **29**(130):343–349, 1975. https://doi.org/10.2307/2005555.

[12] A. Kašuba. *KasubaWorks* (M. Howard(Ed.)). Blurb, 2011. https://www.blurb.com/b/2029793.

[13] Q. Pan, G Xu. Construction of minimal subdivision surface with a given boundary. *Comput. Aided Design*, **43**(4):374–380, 2011. https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.12.013.

[14] K. Ragulskis, M. Sapagovas, R. Čiupaila, A. Jurkulnevičius. Numerical experiment in stationary problems of liquid metal contact. *Vibrotechnika*, **4**(57):105–111, 1986.

[15] M. Sapagovas. *Diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis.* Mokslo aidai, Vilnius, 2007.

[16] M.P. Sapagovas. Finite difference method for solution of quasilinear elliptic equation with discontinuous coefficients. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, **5**(4):72–85, 1965. https://doi.org/10.1016/0041-5553(65)90120-5.

[17] H. Schumacher, M. Wardetzky. Variational convergence of discrete minimal surfaces. *Numer. Math.*, **141**:173–213, 2019. https://doi.org/10.1007/s00211-018-0993-z.

[18] D. Sharp. *Contemporary Architects* (M. Emanuel, D. Sharp, C. Naylor and C. Lerner(Eds.). Macmillan, 1980.

[19] Ø. Tråsdahl, E.M. Rønquist. High order numerical approximation of minimal surfaces. *J. Comput. Phys.*, **230**(11):4795–4810, 2011. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.03.003.

[20] N.N. Uraltseva. Solution of the capillary problem. *Vestn. Leningrd Univ.*, (19):54–64, 1973.

SUMMARY

Plateau problem and minimal surfaces: numerical methods and applications

M. Sapagovas

This article presents an overview of the results of solving the minimal surface equation by numerical methods. Another research task is the application of minimal surfaces in science, technology, especially architecture. The article is illustrated with examples of the application of minimal surfaces.

Keywords: Plateau problem; minimal surface equation; numerical methods; applications of minimal surfaces