Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 156 - 158
2003 Matematikos ir informatikos institutas

Modifikuota neutralaus tipo logistinė diferencialinė lygtis su vėlavimu

Donatas ŠVITRA (KU)
el. paštas: ingrida.sirvydaite@ktl.lt

Nagrinėjama diferencialinė lygtis

$$N(t) = rN\left[1 + a\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) - \frac{N(t-h) + \rho N(t-h)}{K}\right]. \tag{1}$$

Bifurkacijų teorijos pagalba sukonstruotas atsirandantis iš pusiausvyros būsenos $N(t) \equiv K$ periodinis (1) sprendinys.

1. Lygtis (1) prie $a = 0$ buvo įvesta ir tiriama darbuose [1–4]. Juose gautos sprendinių aprėžtumo, asimptotinio stabilumo ir periodinio sprendinio egzistavimo sąlygos. Prie $a \neq 0$ turime neutralaus tipo logistinę diferencialinę lygtį su vėlavimu ir vidiniu grįžtamuoju ryšiu (žr. [5]). Visi lygties (1) parametrai yra neneigiami.

2. Lygtis (1) turi pusiausvyros būsenas $N(t) \equiv 0$ ir $N(t) \equiv K$. Akivaizdu, kad nulinė pusiausvyros būsena nestabili. Po pakeitimo $N(t) = K[1 + x(t)]$ iš (1) gausime lygtį

$$\dot{x} + r(1 + x)\,[rax + x(t-h) + \rho x(t-h)] = 0, \tag{2}$$

kurios charakteringas kvazipolinomas yra funkcija

$$P(\lambda) = \lambda\,[1 + r\rho\exp(-\lambda h)] + ra + r\exp(-\lambda h). \tag{3}$$

Tegul $a = 0$. Tada [4] kvazipolinomas (2) prie fiksuotų ρ ir h turi porą paprastų grynai menamų šaknų $\pm i\sigma_0$, o kitos jo šaknys – neigiamas realias dalis, jei $r = r_0$, kur

$$r_0 = \sigma_0 \sin\sigma_0 h,$$

o σ_0 – vienintelė lygties

$$\operatorname{ctg}\sigma h = -\sigma\rho \tag{4}$$

šaknis, priklausanti intervalui $\left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right)$.

Lygybės $r = r_0 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$) pagalba įveskime mažą parametrą ε. Tada charakteringas kvazipolinomas

$$P(\lambda;\varepsilon) = \lambda\,[1 + (r_0 + \varepsilon)\rho\exp(-\lambda h) + (r_0 + \varepsilon)\exp(-\lambda h)] \tag{5}$$

turės paprastas šaknis $\tau(\varepsilon) \pm i\rho(\varepsilon)$, kurios tenkina sąlygas $\tau(0) = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0$, o visos likusios šaknys turės neigiamas realias dalis.

Nesunku parodyti [4], kad

$$\tau_0' = -\frac{\operatorname{Re} P_{0\varepsilon}' \times \operatorname{Re} P_{0\lambda}' - \operatorname{Im} P_{0\varepsilon}' \times \operatorname{Im} P_{0\lambda}'}{|P_{0\lambda}'|^2}, \tag{6}$$

$$\sigma_0' = -\frac{\operatorname{Re} P_{0\varepsilon}' \times \operatorname{Im} P_{0\lambda}' - \operatorname{Im} P_{0\varepsilon}' \times \operatorname{Re} P_{0\lambda}'}{|P_{0\lambda}'|^2}, \tag{7}$$

kur $P_{0\lambda}' = P_\lambda'(\lambda;\varepsilon)$, $P_{0\varepsilon}' = P_\varepsilon'(\lambda;\varepsilon)$, kai $\varepsilon = 0$, $\lambda = i\sigma_0$,

$$|P_{0\lambda}'|^2 = (\operatorname{Re} P_{0\lambda}')^2 + (\operatorname{Im} P_{0\lambda}')^2, \quad \tau_0' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\tau(\varepsilon), \quad \sigma_0' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\sigma(\varepsilon), \quad \text{kai } \varepsilon = 0.$$

Mūsų atveju

$$\operatorname{Re} P_{0\lambda}' = \frac{r_0^2}{\sigma_0^2}, \quad \operatorname{Im} P_{0\lambda}' = \sigma_0 h - \frac{r_0^2\rho}{\sigma_0^2}, \quad \operatorname{Re} P_{0\varepsilon}' = 0, \quad \operatorname{Im} P_{0\varepsilon}' = -\frac{\sigma_0}{r_0}, \tag{8}$$

ir galioja nelygybės $\tau_0' > 0$, $\sigma_0' > 0$.

Darbuose [4–6] išvystyta bifurkacijų teorija įvairioms diferencialinių lygčių su vėlavimu klasėms. Šią teoriją pritaikėme ir dabar.

1 teorema [4]. *Tegul* $r = r_0 + \varepsilon$ $(|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0 \ll 1)$, $a = 0$. *Diferencialinė lygtis* (1) *pusiausvyros būsenos* $N(t) \equiv K$ *aplinkoje turės vienintelį stabilų periodinį sprendinį*

$$N(t) = K\left(1 + \xi\cos\sigma_0 r + \xi^2 x_2(\tau) + \mathrm{O}(\xi^3)\right). \tag{9}$$

Asimptotinėje išraiškoje (9)

$$x_2(\tau) = A_{2s}\sin 2\sigma_0\tau + A_{2s}\cos 2\sigma_0\tau,$$
$$A_{2s} = \frac{-\frac{1}{2}\sigma_0 \operatorname{Re} P_0(2i\sigma_0)}{|P_0(2i\sigma_0)|^2}, \quad A_{2c} = \frac{-\frac{1}{2}\sigma_0 \operatorname{Im} P_0(2i\sigma_0)}{|P_0(2i\sigma_0)|^2},$$

$P_0(2i\sigma_0) = P(\lambda;\varepsilon)$, kai $\varepsilon = 0$, $\lambda = 2i\sigma_0$ ir $|P_0(2i\sigma_0)|^2 = [\operatorname{Re} P_0(2i\sigma_0)]^2 + [\operatorname{Im} P_0(2i\sigma_0)]^2$.

Nesunku parodyti, kad

$$\operatorname{Re} P_0(2i\sigma_0) = -r_0(1 + 2r_0^2\rho^2), \quad \operatorname{Im} P_0(2i\sigma_0) = 2\sigma_0(1 + r_0^3\rho^3).$$

Be to, $\xi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}}$, $\tau = \frac{t}{1+c_2\xi^2}$, kur

$$c_2 = \frac{A_{2s}/2}{\operatorname{Im} P_{0\lambda}}, \quad b_2 = \frac{1}{4}r_0\Big(1 - 2A_{2c} - 2A_{2s}\frac{\operatorname{Re} P_{0\lambda}'}{\operatorname{Im} P_{0\lambda}'}\Big) \tag{10}$$

yra teigiami dydžiai.

3. Tegul $ra = a_0\varepsilon$. Tada kvazipolinomas (3) prie $r = r_0 + \varepsilon$ turi paprastas šaknis $\eta(\varepsilon) \pm iw(\varepsilon)$, tenkinančias sąlygas $\eta(0) = 0$, $w(0) = \sigma_0$ ir

$$\eta_0' = \tau_0' - a_0 \frac{\operatorname{Re} P_{0\lambda}'}{|P_{0\lambda}'|^2}, \quad w_0' = \sigma_0' + a_0 \frac{\operatorname{Im} P_{0\lambda}'}{|P_{0\lambda}'|^2}, \tag{11}$$

kur τ_0' ir σ_0' nustatomi formulių (6) ir (7) pagalba.

2 teorema. *Tegul* $\eta_0' > 0$, $r = r_0 + \varepsilon$, $ra = a_0\varepsilon$ ($|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$). *Tada pusiausvyros būsenos* $N(t) \equiv K$ *aplinkoje diferencialinė lygtis* (1) *turės vienintelį stabilų periodinį sprendinį* $N(t)$, *kuriam galioja asimptotinės išraiškos* (9), *kur*

$$\xi = \sqrt{-\frac{\eta_0'\varepsilon}{d_0}}, \quad \tau\left[1 - \left(\frac{\eta_0' c_0}{d_0} + \frac{w_0'}{\sigma_0}\right)\varepsilon\right] = t, \tag{12}$$

dydžiai η_0' *ir* w_0' *apibrėžiami formulėmis* (11),

$$d_0 = -\tau_0' b_2, \quad c_0 = c_2 + \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} b_2. \tag{13}$$

Literatūra

[1] K. Gopalsamy, B. Zhang, On neutral delay logistic equation, *Dynamics and Stability System*, **2**, 183–195 (1988).

[2] H. Freedom, Y. Kuang, Stability switches in linear scalar neutral delay equations, *Funkcialaj ekvacioj*, **3**(4) (1991).

[3] Y. Kung, A. Feldstein, Boundedness of solutions of a nonlinear noautonomous neutral delay equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **156** (1996).

[4] Д.И. Швитра, Логистическое дифференциальное уравнение с запаздыванием нейтрального типа, *Liet. Matem. Rink.*, **37**(2), 224–232 (1997).

[5] Д.И. Швитра, *Динамика физиологических систем*, Мокслас, Вильнюс (1989).

[6] Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра, *Автоколебания в системах с запаздыванием*, Мокслас, Вильнюс (1979).

Modified logistic differential equation of neutral type with time delay

D. Švitra

The following differential equation is considered:

$$N(t) = rN\left[1 + a\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{N(t-h) + \rho N(t-h)}{K}\right].$$

The stable periodic solution based on the bifurcation theory of that differential equation is constructed.