Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 140–148

Суммирование по Чезаро и мультипликативные функции на симметрической группе

Витас ЗАХАРОВАС (VU)

1. Результаты

Пусть S_n – множество подстановок степени n. Каждый элемент $\sigma \in S_n$ однозначно, с точностью до порядка множителей, разлагается в произведение независимых циклов

$$\sigma = \kappa_1 \kappa_2 ... \kappa_\omega.$$

Функцию $f: S_n \to C$ будем называть мультипликативной, если имеет место равенство $f(\sigma) = f(\kappa_1)f(\kappa_2)...f(\kappa_n)$. Далее будем считать, что значение f на циклах зависит только от их порядка, то есть $f(\kappa) = \hat{f}(|\kappa|)$, где $|\kappa|$ – порядок цикла κ. Пусть $m_k(\sigma)$ равняется числу циклов, входящих в разложение σ, порядок которых равняется k. Тогда, очевидно $m_1(\sigma) + 2m_2(\sigma) + ... + nm_n(\sigma) = n$. Таким образом n величин $\hat{f}(1), \hat{f}(2), \ldots, \hat{f}(n)$ полностью определяют значение функции f на любой подстановке $\sigma \in S_n$

$$f(\sigma) = \hat{f}(1)^{m_1(\sigma)} \hat{f}(2)^{m_2(\sigma)} \ldots \hat{f}(n)^{m_n(\sigma)}.$$

На группе S_n определим так называемую меру Эванса $\nu_{n,\theta}$ с помощью формулы

$$\nu_{n,\theta}(\sigma) = \frac{\theta^{k(\sigma)}}{\theta_{(n)}},$$

где $k(\sigma) = m_1(\sigma) + m_2(\sigma) + \ldots + m_n(\sigma)$, а $\theta_{(n)} = \theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)$.

Далее будем исследовать средние мультипликативных функций по отношению к мере Эванса.

$$M_n(f) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) \nu_{n,\theta}(\sigma).$$

Поскольку количество σ таких, что $m_k(\sigma)=s_k$, равняется $n!\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{s_j!j^{s_j}}$, то

$$\nu_{n,\theta}(m_1(\sigma)=s_1,\ldots,m_n(\sigma)=s_n)=\frac{n!}{\theta_{(n)}}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\theta}{j}\right)^{s_j}\frac{1}{s_j!}.$$

Поэтому

$$M_n(f)=\binom{n+\theta-1}{n}^{-1}\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\theta\hat{f}(j)}{j}\right)^{k_j}\frac{1}{k_j!}.$$

Нетрудно видеть, что $M_n(f)$ равняется $\binom{n+\theta-1}{n}^{-1}N_n$, где N_n определяются соотношением

$$F(z)=\exp\left\{\theta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(j)}{j}z^j\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}N_mz^m.$$

Поскольку коэффициенты $\hat{f}(j)$ при $j>n$ не влияют на величину коэффициента при z^n, то далее будем считать, что $\hat{f}(j)=1$, при $j>n$. Поэтому

$$F(z)=\exp\left\{\theta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(j)}{j}z^j\right\}=\sum_{j=0}^{\infty}N_jz^j=\frac{\exp\{\theta L_n(z)\}}{(1-z)^\theta},$$

здесь и далее $L_n(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{f}(j)-1}{j}z^j$, и $L_0(z)=0$.

Функция $F(z)$ есть произведение двух аналитических функции $\exp\{\theta L_n(z)\}=\sum_{k=0}^{\infty}m_kz^k$ и $\frac{1}{(1-z)^\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+\theta-1}{n}z^n$, поэтому

$$M_n(f)=\binom{n+\theta-1}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}m_j\binom{n-j+\theta-1}{n-j}. \tag{1}$$

Ассимптотику суммы, стоящей в правой части равенства (1), оценим с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_mz^m$ - аналитическая в круге $|z|<1$ функция. Пусть*

$$S_\theta(f;n)=\sum_{k=1}^{n}ka_k\binom{n-k+\theta-1}{n-k},$$

тогда при фиксированном $\theta > 0$ имеем

$$\frac{1}{\binom{n+\theta-1}{n}}\sum_{k=0}^{n} a_k\binom{n-k+\theta-1}{n-k} - f(e^{-1/n}) - \frac{S_\theta(f;n)}{n\binom{n+\theta-1}{n}}$$
$$\ll \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|S_\theta(f;j)|}{j^\theta}e^{-j/n} + \frac{1}{n^\theta}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{|S_\theta(f;j)|}{j}e^{-j/n}.$$

Константа в символе $\ll$ зависит только от θ.

Сумма, стоящая в правой части равенства (1), называется чезаровским средним с параметром $p = \theta - 1$. Если для некоторого фиксированного формального ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ чезаровские средние с параметром p сходятся к некоторому числу A, то пишется, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_k$ суммируем (C, p) к числу A, или $(C,p)\sum_{j=0}^{\infty} a_j = A$.

Из теоремы 1 можно вывести следующую, возможно уже известную теорему.

Теорема 2. *Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируем (C,p) к A с $p > -1$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{p+1}(f;n)}{n^{p+1}} = 0, \tag{3}$$

где $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Если $\theta = 1$, то теорема 2 превращается в хорошо известную теорему Таубера (см., напр., [6],[7]). Для этого частного случая доказательство теоремы 1 получается несколько изменив доказательство теоремы Таубера. Определим

$$\mu_n(p) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\hat{f}(k) - 1|^p\right)^{1/p}.$$

С помощью теоремы 1 легко доказывается следующяя теорема.

Теорема 3. *Пусть $p > \max\left\{1, \frac{1}{\theta}\right\}$, тогда*

$$M_n(f) = \exp\left\{\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{\hat{f}(k)-1}{k}\right\} + \mathrm{O}\big(\mu_n(p)\big),$$

здесь константа в символе $\mathrm{O}(..)$ зависит только от θ и p.

В работах [2],[3],[4] и [5] варианты теоремы 3 были доказаны с менее точными остаточными членами.

2. Доказательства

Лемма 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_n z^n$ *- аналитическая функция в области* $\Delta(\eta,\phi) = \{z| \quad |z| < 1+\eta, \quad |arg(z-1)| > \phi\}$*, где* $\eta > 0$ *и* $0 < \phi < \pi/2$*. Если*

$$|f(z)| \leqslant K_1|1-z|^{\alpha_1} + K_2|1-z|^{\alpha_2},$$

при $z \in \Delta(\eta,\phi)$*, то существует такая константа* $c = c(\alpha_1,\alpha_2,\eta,\phi)$*, независящая от* K_1, K_2*, что*

$$|f_n| \leqslant c(K_1 n^{-\alpha_1-1} + K_2 n^{-\alpha_2-1}).$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 работы [1].

Пусть

$$c_{m,j} = \sum_{s=0}^{m} \frac{\binom{m-s+\theta-1}{m-s}\binom{s-\theta-1}{s}}{s+j},$$

при $j \geqslant 1$. Тогда производящая функция величин $c_{m,j}$ будет

$$F_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,j} z^m = \frac{1}{(1-z)^\theta}\int_0^1 (1-xz)^\theta x^{j-1}\,\mathrm{d}x.$$

Лемма 2. *Для величин* $c_{m,j}$ *справедливы оценки*

(i) $0 \leqslant c_{m,j} \leqslant \frac{\theta}{j^2} e^{\theta m/j}, \quad m \geqslant 1, \quad c_{0,j} = \frac{1}{j};$

(ii) $c_{m,j} = \binom{m+\theta-1}{m}\int_0^1 (1-y)^\theta y^{j-1}\,\mathrm{d}y + \mathrm{O}\Big(\frac{m^{\theta-2}}{j^\theta} + \frac{1}{m^2}\Big).$

Доказательство. Дифференцируя функцию $F_j(z)$ получим

$$zF_j'(z) = \frac{\theta z F_j(z)}{1-z} + 1 - jF_j(z).$$

Разлагая в степенной ряд обе стороны полученного выражения и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получим

$$c_{m,j} = \frac{\theta}{m+j}\sum_{s=0}^{m-1} c_{s,j}, \quad m \geqslant 1,$$

и $c_{0,j} = \frac{1}{j}$. Из этого рекуррентного уравнения следует

$$0 < c_{m,j} \leqslant \frac{\theta}{j} \sum_{s=0}^{m-1} c_{s,j}, \quad m \geqslant 1.$$

Тогда

$$0 \leqslant c_{m,j} \leqslant b_{m,j},$$

где $b_{m,j}$ являются решениями рекуррентного уравнения

$$b_{m,j} = \frac{\theta}{j} \sum_{s=0}^{m-1} b_{s,j}, \quad m \geqslant 1,$$

с начальным условием $b_{0,j} = 1/j$. Не трудно проверить, что

$$b_{m,j} = \frac{\theta}{j^2}\left(1 + \frac{\theta}{j}\right)^{m-1}, \quad m \geqslant 1.$$

Поэтому применяя неравенство $1 + x \leqslant e^x$ получаем оценку (i)

$$a_{m,j} \leqslant \frac{\theta}{j^2}\left(1 + \frac{\theta}{j}\right)^{m-1} \leqslant \frac{\theta}{j^2} e^{\theta m/j}, \quad m \geqslant 1.$$

При доказательстве оценки (ii) воспользуемся леммой 1 с $\eta = 1/2$, и $\phi = \pi/4$. Представим $F_j(z)$ в виде суммы двух аналитических функций

$$F_j(z) = \frac{1}{(1-z)^\theta} \int_0^1 (1-x)^\theta x^{j-1}\,\mathrm{d}x + G_j(z). \tag{4}$$

Пусть $z \in \Delta(1/2, \pi/4)$, $|z-1| < 1/2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-zy)^\theta y^{j-1}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 (1-y)^\theta y^{j-1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1-|1-z|} (1-y)^\theta \left(\left(1 - y\frac{z-1}{1-y}\right)^\theta - 1\right) y^{j-1}\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{1-|1-z|}^1 \left((1-y-y(z-1))^\theta - (1-y)^\theta\right) y^{j-1}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\ll \int_0^{1-|1-z|} (1-y)^\theta \frac{y^j|1-z|}{1-y}\,\mathrm{d}y + \int_{1-|1-z|}^1 y^{j-1}|1-z|^\theta\,\mathrm{d}y$$

$$\ll |1-z|\int_0^1 (1-y)^{\theta-1}y^{j-1}\,\mathrm{d}y + |1-z|^{\theta+1} \ll \frac{|1-z|}{j^\theta} + |1-z|^{\theta+1}.$$

Нетрудно видеть, что полученная оценка справедлива во всей области $\Delta(\eta,\phi)$. Поэтому при $z\in\Delta(\eta,\psi)$

$$G_j(z) = \frac{1}{(1-z)^\theta}\int_0^1 \big((1-yz)^\theta - (1-y)^\theta\big)y^{j-1}\,\mathrm{d}y \ll |1-z| + \frac{|1-z|^{1-\theta}}{j^\theta}. \quad (5)$$

Применяя лемму 1 с $f(z) = G_j(z)$ в виду (4), (5), получаем оценку (ii). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку

$$\sum_{k=1}^\infty S_\theta(f;k)z^k = \frac{zf'(z)}{(1-z)^\theta},$$

то

$$na_n = \sum_{k=1}^n S_\theta(f;k)\binom{n-k-\theta-1}{n-k}, \quad n\geqslant 1.$$

Поэтому

$$R_n := \sum_{k=0}^n a_k\binom{n-k+\theta-1}{n-k} - f(e^{-1/n})\binom{n+\theta-1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n-k+\theta-1}{n-k}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k S_\theta(f;j)\binom{k-j-\theta-1}{k-j}$$

$$- \binom{n+\theta-1}{n}\sum_{k=1}^\infty e^{-k/n}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k S_\theta(f;j)\binom{k-j-\theta-1}{k-j}$$

$$= \sum_{j=1}^n S_\theta(f;j)c_{n-j,j} - \binom{n+\theta-1}{n}\sum_{j=1}^\infty S_\theta(f;j)\sum_{k=j}^\infty \frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j}e^{-k/n}}{k}.$$

Пусть $j > n/2$, тогда

$$\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j}e^{-k/n}}{k}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\binom{s-\theta-1}{s}e^{-\frac{j+s}{n}}}{j+s}=\int\limits_0^{e^{-1/n}}(1-x)^{\theta}x^{j-1}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\limits_{1/n}^{\infty}(1-e^{-y})^{\theta}e^{-jy}\,\mathrm{d}y\leqslant\int\limits_{1/n}^{\infty}y^{\theta}e^{-jy}\,\mathrm{d}y\ll\frac{e^{-j/n}}{jn^{\theta}}.$$

Применяя полученную оценку и лемму 2, имеем

$$R_n-\frac{S_\theta(f;n)}{n}\ll\sum_{j\leqslant n/2}|S_\theta(f;j)|\Bigg|c_{n-j,j}-\binom{n+\theta-1}{n}$$
$$\times\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j}e^{-k/n}}{k}\Bigg|+\sum_{n/2<j<n}|S_\theta(f;j)|c_{n-j,j}$$
$$+\binom{n+\theta-1}{n}\sum_{j>n/2}|S_\theta(f;j)|\Bigg|\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\binom{k-j-\theta-1}{k-j}e^{-k/n}}{k}\Bigg|$$
$$\ll\binom{n+\theta-1}{n}\sum_{j\leqslant n/2}S_\theta(f;j)\int\limits_0^1(1-y)^{\theta}y^{j-1}\,\mathrm{d}y\left|\frac{\binom{n-j+\theta-1}{n-j}}{\binom{n+\theta-1}{n}}-1\right|$$
$$+\binom{n+\theta-1}{n}\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{j\leqslant n/2}\frac{|S_\theta(f;j)|}{j^{\theta}}+\frac{1}{n}\sum_{n/2<j<n}\frac{|S_\theta(f;j)|}{n^{\theta}}$$
$$+\frac{1}{n^{\theta}}\sum_{j>n}\frac{|S_\theta(f;j)|}{j}e^{-j/n}\Bigg)\ll\binom{n+\theta-1}{n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|S_\theta(f;j)|}{j^{\theta}}e^{-j/n}$$
$$+\binom{n+\theta-1}{n}\frac{1}{n^{\theta}}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{|S_\theta(f;j)|}{j}e^{-j/n},$$

здесь мы воспользовались тем, что $\binom{n+\theta-1}{n}=\frac{n^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}\left(1+O(\frac{1}{n})\right)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность условий (2) и (3) следует непосредственно из теоремы 1. То, что суммируемость ряда по Чезаро влечет за собой (2) и (3) доказано в [7].

Доказательство теоремы 3. Применим теорему 1 с $f(z) = \exp\{L_n(z)\} = \sum_{k=0}^{\infty} m_k z^k$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_\theta(f;k)z^k = \frac{zf'(z)}{(1-z)^\theta} = F(z)\theta\sum_{k=1}^{n}(\hat{f}(k)-1)z^k,$$

поэтому

$$S_\theta(f;m) = \sum_{k=1}^{m}(\hat{f}(k)-1)N_{m-k}.$$

Поскольку $|N_k| \leqslant \binom{k+\theta-1}{k}$, то применяя неравенство Коши с $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, получим

$$|S_\theta(f;m)| \ll \left(\sum_{k=1}^{m}|\hat{f}(k)-1|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{m}k^{(\theta-1)q}\right)^{1/q} \ll m^\theta\left(\frac{n}{m}\right)^{1/p}\mu_n(p).$$

Из теоремы 1, применяя оценку $\exp\{\theta L_n(e^{-1/n})\} = \exp\{\theta L_n(1)\}\big(1 + O(\mu_n(p))\big)$, получим

$$\frac{N_n}{\binom{n+\theta-1}{n}} - \exp\left\{\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{\hat{f}(k)-1}{k}\right\} \ll \mu_n(p) + \frac{\mu_n(p)}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^{1/p}e^{-m/n}$$
$$+\mu_n(p)\frac{1}{n^\theta}\sum_{m=n}^{\infty}m^{\theta-1}\left(\frac{n}{m}\right)^{1/p}e^{-m/n} \ll \mu_n(p).$$

Теорема доказана.

Литература

[1] P. Flajolet, A. Odlyzko, Singularity analysis of generating functions, *SIAM J. Discrete Math.*, 32, 216–240 (1990).

[2] E. Manstavičius, The Berry-Essen bound in the theory of random permutations, *The Ramanujan Journal.* **2**, 185–199 (1998).

[3] E. Manstavičius, A Tauber theorem and multiplicative functions on permutations, *Number Theory in Progres*, Eds K. Gyбry *et al.*, Walter de Gruytner, Berlin, New York, 1025–1038 (1999).

[4] E. Manstavičius, Decomposable mappings on combinatorial structures, Analytic approach, *Preprint 98–15*, VU Department of Mathematics (1999).

[5] Э. Манставичюс, Адитивные и мультипликативные функции на случайных подстановках, *Liet. matem. rink.*, **36**, 501–511 (1996).

[6] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **46**, University Press, Cambridge (1995).

[7] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, Москва, Изд. иностр. лит. (1951).

Čezaro sumavimas ir multiplikatyvios funkcijos, apibrėžtos simetrinėje grupėje

V. Zacharovas

Straipsnyje nagrinėjamas Čezaro sumavimo metodas bei jo taikymas multiplikatyvių funkcijų, apibrėžtų simetrinėje grupėje, vidurkių asimptotikos įvertinimui.