Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 151–157

Apie erdvės $D_\alpha[0,\infty)$ metrizavimą

Rimas BANYS (VGTU)
el.paštas: rimasbanys@takas.lt

Pažymėkime $D = D[0,\infty)$ erdvę funkcijų $x(t)$, $t \in [0,\infty)$, kurios yra tolydžios iš dešinės ir turi ribas iš kairės:

(i) $x(t+) = \lim\limits_{s\downarrow t} x(s) = x(t)$, kai $0 \leqslant t < \infty$,

(ii) $x(t-) = \lim\limits_{s\uparrow t} x(s)$ egzistuoja, kai $t > 0$.

Daugelio tikimybių teorijos taikymuose nagrinėjamų atsitiktinių procesų trajektorijos yra erdvės D funkcijos. Darbe [1] buvo apibrėžta pilnoji metrika d, su kuria (D,d) yra separabelioji metrinė erdvė.

Mes nagrinėsime erdvės D poerdvius D_α $(\alpha > 0)$ ir apibrėšime juose pilnąsias metrikas d_α, kurios yra stipresnės negu metrika d. Darbe [2] (žr. taip pat [3]) buvo nagrinėjami erdvės $D[0,1]$ poerdviai $D_\alpha[0,1]$.

Šis straipsnelis yra [2] apibendrinimas tuo atveju, kai funkcijos yra apibrėžtos begaliniame intervale $[0,\infty)$.

Tegul $x \in D$, T ir δ $(\delta < T)$ yra teigiami skaičiai. Suskaidykime intervalą $[0,T]$ taškais t_i, $i = 1,\dots,r$ $(r \geqslant 1)$, kurie tenkina sąlygas

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = T, \\ t_i - t_{i-1} > \delta, \quad i = 1,2,\dots,r. \end{cases} \tag{1}$$

Visiems teigiamiems δ ir $T > \delta$ apibrėšime

$$w_x(\delta,T) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1\leqslant i\leqslant r} \sup_{s,t\in[t_{i-1},t_i)} |x(s)-x(t)|,$$

kur apatinis rėžis imamas pagal visas baigtines taškų aibes $\{t_i\}$, tenkinanačias (1) sąlygas, ir

$$w_x(\delta) = \inf_{T>\delta} \max\left\{\frac{1}{T}, w_x(\delta,T)\right\}.$$

Pažymėkime

$$m_x(u) = w_x(\mathrm{e}^u+), \quad -\infty < u < \infty.$$

Taip apibrėžta funkcija $m_x(u)$ yra nemažėjanti ir tolydi iš dešinės.

Dabar kiekvienam $\alpha > 0$ apibrėšime erdvės D poerdvį D_α:

$$D_\alpha = \left\{ x \in D : \int_{-\infty}^{\infty} m_x(u) \mathrm{e}^{-\alpha u} \, du < \infty \right\}.$$

Panaudodami erdvės D metriką d, kiekviename poerdvyje D_α apibrėšime metriką d_α, kuri yra stipresnė už d ir su kuria D_α tampa pilnąja ir separabeliąja metrine erdve. Pirmiausia nusakysime, kaip apibrėžiama metrika d.

Pažymėkime Λ aibę griežtai didėjančių tolydžiųjų funkcijų λ, apibrėžtų intervale $[0, \infty)$ ir tenkinančių sąlygas $\lambda(0) = 0$, $\lambda(\infty) = \lim_{t \to \infty} \lambda(t) = \infty$, ir

$$\sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| < \infty.$$

Jei $\lambda \in \Lambda$, žymėsime

$$T_\lambda = \sup \left\{ T > 0 : \sup_{\substack{s,t \leqslant T \\ s \neq t}} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| < \frac{1}{T} \right\},$$

$$||\lambda|| = \frac{1}{T_\lambda}.$$

Tegul $x, y \in D$. Apibrėžkime

$$\rho(x, y) = \inf_{t > 0} \max \left\{ \frac{1}{t}, \sup_{s \leqslant t} |x(s) - y(s)| \right\}.$$

Pastebėsime, kad

$$\rho(x, y) = \sup_{t > 0} \min \left\{ \frac{1}{t}, \sup_{s \leqslant t} |x(s) - y(s)| \right\}.$$

Pažymėję $\Lambda^- = \{\lambda \in \Lambda : \sup_{t \geqslant 0} (\lambda(t) - t) \leqslant 0\}$, apibrėšime metriką d:

$$d(x, y) = \inf_{\lambda, \mu \in \Lambda^-} \max \{ \rho(x \circ \lambda, y \circ \mu), ||\lambda||, ||\mu|| \}.$$

Simboliu „$\circ$“ žymime funkcijų kompoziciją. Kaip jau minėjome, (D, d) yra pilnoji ir separabelioji metrinė erdvė.

Dabar erdvėje D_α apibrėšime metriką d_α. Jei $x, y \in D_\alpha$, tai

$$d_\alpha(x, y) = d(x, y) + L_\alpha(m_x, m_y),$$

kur

$$L_\alpha(m_x, m_y) = \int_{-\infty}^{\infty} |m_x(u) - m_y(u)| e^{-\alpha u} du.$$

Kadangi d ir L_α abi yra metrikos ir $d(x,y) = 0$ tada ir tik tada, kai $x = y$, tai d_α iš tikrųjų yra metrika. Be to, ji yra stipresnė už metriką d. Pavyzdžiui, jei $x_0(t) \equiv 0$, o $x_n(t) = (-nt + n^{-1}) \mathrm{I\!I}_{[0,n^{-2})}(t)$, kur $\mathrm{I\!I}_A(t)$ yra aibės $A \subset [0,\infty)$ indikatorius, tai aišku $d(x_n, x_0) \to 0$. Nesunku įsitikinti, kad $x_n \in D_\alpha$, kai $0 < \alpha < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, tačiau $d_\alpha(x_n, x_0) \not\to 0$, kai $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. Iš tikrųjų,

$$L_\alpha(m_{x_n}, m_{x_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} m_{x_n}(u) e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} n^{2\alpha - 1},$$

kai $0 < \alpha < 1$. Taigi $L_\alpha(m_{x_n}, m_{x_0}) \not\to 0$, kai $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

1 lema. *Su kiekvienu $\delta > 0$ funkcija $w_x(\delta)$ yra tolydi kiekviename metrinės erdvės (D, ρ) taške x.*

Įrodymas. Akivaizdu, kad su kiekvienu $T > \delta$ funkcija $w_x(\delta, T)$ yra tolydi taške x. Funkcijos $w_x(\delta)$ tolydumas išplaukia iš jos apibrėžimo.

2 lema. *Jei $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$, tai $m_{x_n}(u) \to m_x(u)$ kiekviename funkcijos $m_x(u)$ tolydumo taške u.*

Įrodymas. Esant išpildytoms lemos sąlygoms, galima parinkti dvi sekas $\lambda_n, \mu_n \in \Lambda^-$, $n = 1, 2, \ldots$, taip, kad su kiekvienu $T > 0$ galiotų lygybės

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\lambda_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\mu_n(t) - t| = 0,$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |x \circ \lambda_n \circ \mu_n^{-1}(t) - x_n(t)| = 0. \tag{2}$$

Tegul δ yra funkcijos $w_x(\delta)$ tolydumo taškas, o $\varepsilon > 0$ ir $T > \delta + \varepsilon$ – bet kokie skaičiai. Intervalą $[0, T]$ suskaidysime taškais $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_r = T$ taip, kad būtų išpildytos sąlygos

$$t_i - t_{i-1} > \delta + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad \text{ir}$$

$$w_x(\delta + \varepsilon, T) + \varepsilon \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \sup_{s,t \in [t_{i-1}, t_i)} |x(s) - x(t)|. \tag{3}$$

Taškai $\lambda_n^{-1}(t_0) = 0 < \lambda_n^{-1}(t_1) < \ldots < \lambda_n^{-1}(t_{r-1})$ skaido intervalą $[0, T]$ į r dalių ir, esant pakankamai dideliems n, galioja nelygybės

$$\lambda_n^{-1}(t_i) - \lambda_n^{-1}(t_{i-1}) > \delta, \quad i = 1, \ldots, r-1, \quad T - \lambda_n^{-1}(t_{r-1}) > \delta.$$

Iš lygybės

$$\sup_{s,t \in [t_{i-1}, t_i)} |x(s) - x(t)| = \sup_{s,t \in [\lambda_n^{-1}(t_{i-1}), \lambda_n^{-1}(t_i))} |x \circ \lambda_n(s) - x \circ \lambda_n(t)|$$

ir (3) turime

$$w_x(\delta + \varepsilon, T) + \varepsilon \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant r-1} \sup_{s,t \in [\lambda_n^{-1}(t_{i-1}), \lambda_n^{-1}(t_i))} |x \circ \lambda_n(s) - x \circ \lambda_n(t)|,$$

$$w_x(\delta + \varepsilon, T) + \varepsilon \geqslant \sup_{s,t \in [\lambda_n^{-1}(t_{r-1}), T)} |x \circ \lambda_n(s) - x \circ \lambda_n(t)|.$$

Todėl

$$w_{x \circ \lambda_n}(\delta, T) \leqslant w_x(\delta + \varepsilon, T) + \varepsilon.$$

Panašiai samprotaudami, gausime nelygybes

$$w_x(\delta - \varepsilon, T) - \varepsilon \leqslant w_{x \circ \lambda_n \circ \mu_n^{-1}}(\delta, T) \leqslant w_x(\delta + \varepsilon, T) + \varepsilon.$$

Dabar galime teigti, kad

$$\lim_{n \to \infty} w_{x \circ \lambda_n \circ \mu_n^{-1}}(\delta, T) = w_x(\delta, T).$$

Iš šios ir (2) lygybių ir 1 lemos gauname, kad $\lim\limits_{n \to \infty} w_{x_n}(\delta, T) = w_x(\delta, T)$. Pastaroji lygybė yra teisinga su visais $T > 0$, taigi ir

$$\lim_{n \to \infty} w_{x_n}(\delta) = w_x(\delta).$$

Lema įrodyta.

1 teorema. (D_α, d_α) *yra pilnoji metrinė erdvė.*

Įrodymas. Tarkime, kad $x_n \in D_\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, yra d_α-fundamentalioji seka. Tuomet kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime parinkti skaičius $A > 0$ ir natūralųjį N tokius, kad galiotų nelygybės

$$L_\alpha(m_{x_N}, m_{x_{N+k}}) = \int_{-\infty}^{\infty} |m_{x_N}(u) - m_{x_{N+k}}(u)| \mathrm{e}^{-\alpha u} \mathrm{d}u < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_{-\infty}^{-A} m_{x_n}(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

$$\int_{A}^{\infty} m_{x_n}(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Vadinasi,

$$\int_{-\infty}^{-A} m_{x_{N+k}}\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|m_{x_{N+k}}(u) - m_{x_n}(u)\right|\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u$$
$$+ \int_{-\infty}^{A} m_{x_N}(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u < 2\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{ir}$$

$$\int_{A}^{\infty} m_{x_{N+k}}\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u < 2\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Iš pastarųjų dviejų nelygybių ir (4), (5) išplaukia, kad

$$\lim_{a\to-\infty}\sup_n \int_{-\infty}^{a} m_{x_n(u)}\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u = \lim_{b\to\infty}\sup_n \int_{b}^{\infty} m_{x_n}(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u = 0. \tag{6}$$

Kadangi seka x_n yra d-fundamentalioji, o metrika d – pilnoji, tai egzistuoja funkcija $x \in D$ tokia, kad $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Tačiau tuomet $m_{x_n}(u)$ konverguoja į $m_x(u)$ visuose funkcijos m_x tolydumo taškuose. Todėl, turėdami omenyje (6), gauname

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u < \infty \;\text{ ir }\; \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|m_{x_n}(u) - m_x(u)\right|\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u = 0.$$

Vadinasi, $x \in D_\alpha$ ir $d_\alpha(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

2 teorema. *(D_α, d_α) yra separabelioji metrinė erdvė.*

Įrodymas. Pažymėkime D^n aibę tų funkcijų, kurios įgyja pastovias racionalias reikšmes intervaluose $I_i^n = [(i-1)n^{-1}, in^{-1})$, $i = 1, 2, \ldots$, ir $D^0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D^n$. Jei $x \in D_\alpha$ ir $t_i^n \in I_i^n$, $i = 1, 2, \ldots$ yra funkcijos x tolydumo taškai, tai egzistuoja funkcija $x_n \in D^n$ tokia, kad $|x(t_i^n) - x_n(t_i^n)| < n^{-2\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots$. Funkcijų x_n reikšmės $x_n(t)$ kiekviename funkcijos x tolydumo taške t konverguoja į $x(t)$. Be to, $w_{x_n}(\delta) \leqslant w_x(\delta + 2n^{-1}) + 2n^{-2\alpha}$. Kadangi $w_{x_n}(\delta) = 0$, kai $0 < \delta < \frac{1}{n}$, tai

$$w_{x_n}(\delta) \leqslant w_x\left(\delta + \frac{2}{\delta^{-1}}\right) + \frac{2}{\delta^{-2\alpha}} = w_x(3\delta) + 2\delta^{2\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

ir

$$m_{x_n}(u) \leqslant m_x(u + \log 3) + 2\mathrm{e}^{2\alpha u}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{8}$$

Iš (7) išplaukia, kad

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_n w_{x_n}(\delta) = 0.$$

Todėl seka x_n yra kompaktiška erdvėje (D, d) (žr. [1]) ir $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Pagal 2 lemą $m_{x_n}(u)$ konverguoja į $m_x(u)$ visuose funkcijos m_x tolydumo taškuose. Todėl, pagal (8), $L(m_{x_n}, m_x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Vadinasi, $d_\alpha(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Taigi D^0 yra metrinės erdvės (D_α, d_α) separantė. Teorema įrodyta.

Dabar nusakysime kompaktiškumo erdvėje (D_α, d_α) sąlygas.

3 teorema. *Erdvės (D_α, d_α) poaibio A uždarinys yra kompaktiškas tada ir tik tada, kai su kiekvienu $T > 0$*

$$\sup_{x \in A} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |x(t)| < \infty \tag{9}$$

ir

$$\lim_{a \to -\infty} \sup_{x \in A} \int_{-\infty}^{a} m_x(u) \mathrm{e}^{-\alpha u} \mathrm{d}u = 0. \tag{10}$$

Įrodymas. Tarkime, kad patenkintos (9) ir (10) sąlygos. Tuomet $w_x(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$ tolygiai aibėje A. Todėl aibės A uždarinys erdvėje (D, d) yra kompaktiškas (žr. [1]). Jei $x_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, tai iš sekos x_n galima išskirti konverguojantį posekį $x_{n'}$, t.y. egzistuoja funkcija $x \in D$ tokia, kad $d(x_{n'}, x) \to 0$ $(n' \to \infty)$. Bet tuomet

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_x(u) \mathrm{e}^{-\alpha u} \mathrm{d}u < \infty,$$

taigi $x \in D_\alpha$. Kadangi $m_{x_{n'}}(u)$ konverguoja į $m_x(u)$ kiekviename funkcijos $m_x(u)$ tolydumo taške u, tai $d_\alpha(x_{n'}, x) \to 0$ $(n' \to \infty)$.

Įrodysime teoremos sąlygų būtinumą. Jei aibės A uždarinys yra kompaktiškas, jos uždarinys erdvėje (D, d) taip pat yra kompaktiškas, kadangi metrika d_α yra stipresnė už d. Todėl sąlyga (9) yra patenkinta. Jeigu nebūtų patenkinta (10) sąlyga, tai tuomet galėtume rasti skaičių seką a_n ir funkcijų seką $x_n \in D$ tokias, kad $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ ir

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{a_n} m_{x_n}(u) \mathrm{e}^{-\alpha u} \mathrm{d}u > 0. \tag{11}$$

Iš sekos x_n išskyrę posekį $x_{n'}$, konverguojantį į kokią nors funkciją $x \in D_\alpha$, gautume lygybę

$$\lim_{n'\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| m_{x_{n'}} - m_x(u) \right| \mathrm{e}^{-\alpha u} \mathrm{d}u = 0.$$

Kadangi ši lygybė prieštarauja (11), tai prielaida, kad (10) nepatenkinta, yra klaidinga. Teorema įrodyta.

Pažymėkime $\pi_{t_1\dots t_k}$ erdvės D_α atvaizdį į R^k, kuris apibrėžiamas lygybe

$$\pi_{t_1\dots t_k}(x) = \bigl(x(t_1), \dots, x(t_k)\bigr), \quad x \in D_\alpha,\ t_1, \dots, t_k \in [0,\infty).$$

Tegul $\mathcal{D}_\alpha$ yra erdvės (D_α, d_α) Borelio aibių σ-algebrą. Nesunku įsitikinti, kad atvaizdis $\pi_{t_1\dots t_k}$ yra išmatuojamas σ-algebros $\mathcal{D}_\alpha$ atžvilgiu. Jei Q yra begalinio intervalo $[0,\infty)$ poaibis, o $\mathcal{B}^k$ – euklidinės erdvės R^k Borelio aibių σ-algebra, tai visų aibių $\pi^{-1}_{t_1\dots t_k}(H)$, $H \in \mathcal{B}^k$, klasę žymėsime $\mathcal{F}_Q$, t.y.

$$\mathcal{F}_Q = \{\pi^{-1}_{t_1\dots t_k}(H) : t_i \in Q,\ i = 1, \dots, k,\ H \in \mathcal{B}^k,\ k \geqslant 1\}.$$

4 teorema. *Jei Q yra visur tirštas intervalo $[0,\infty)$ poaibis, tai klasė $\mathcal{F}_Q$ generuoja erdvės (D_α, d_α) Borelio aibių σ-algebrą $\mathcal{D}_\alpha$.*

Šis teiginys įrodomas panašiai, kaip ir analogiškos teoremos erdvėse $D[0,1]$, $D[0,\infty)$ ir $D_\alpha[0,1]$ (žr. [5], [1], [2]).

Literatūra

[1] V.V. Kalashnikov, A complete metric in the function space $D[0,\infty)$ and its applications, *Lect. Notes Math.*, **982**, 60–75 (1983).

[2] M. Woodroofe, *On the Weak Convergence of Stochastic Processes without Discontinuities of the Second Kind*, Z. Wahrsch. verw. Geb., **11**, 18–25 (1968).

[3] R. Banys, Pilnoji metrika trūkių funkcijų erdvėje, *Lietuvos Matematikų Draugijos Mokslo Darbai*, 3 tomas, 1–6 (1999).

[4] K.R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York (1967).

[5] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York (1968).

On metrization of the space $D_\alpha[0,\infty)$

R. Banys

A complete metric on the function space $D_\alpha[0,\infty)$, which is a subspace of the space $D[0,\infty)$ of functions without discontinuities of the second kind, is constructed. This metric converts $D_\alpha[0,\infty)$ into a complete separable metric space. It is a modification of a metric on $D_\alpha[0,1]$ introduced by Woodroofe, and is stronger than the well-known metrics on $D[0,\infty)$. Conditions for compactness of the subsets of $D_\alpha[0,\infty)$ are given.