Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 206–213

Эллиптическое уравнение с полурегулярным вырождением

Бронюс КВЯДАРАС (MII, VDU)
e-mail: mathematica@ktl.mii.lt

Известно (см. напр. [1]), что обыкновенное дифференциальное уравнение

$$z^2y'' + zb(z)y' + c(z)y = 0$$

с аналитическими в окрестности нуля коэффициентами $b(z)$ и $c(z)$ имеет фундаментальные решения

$$y_1(z)=z^{\rho_1}\varphi(z), \quad y_2(z)=z^{\rho_2}\psi(z) \ \text{ либо } \ y_2(z)=z^{\rho_1}\psi(z)\ln z+z^{\rho_2}\chi(z). \tag{1}$$

Здесь $\varphi(z), \psi(z), \chi(z)$ – однозначные аналитические в окрестности нуля функции, а ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения $\rho(\rho-1)+b(0)\rho+c(0)=0$.

Возникает вопрос: существуют ли какие-либо уравнения в частных производных, решения которых имеют те же свойства. Как показал А. Янушаускас [2], эллиптическое уравнение

$$z^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + z\left(b_0(z,x)\frac{\partial u}{\partial z}+\sum_{i=1}^{n} b_i(z,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + c(z,x)u = 0,$$

с аналитическими при $|z|<r_0$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Omega=\{x\in C^n \big| |x_i-x_i^\circ|< r_i, \quad i=1,2,\ldots,n\}$ коэффициентами имеет два семейства решений вида (1) с аналитическими функциями $\varphi(z,x)$ и $\psi(z,x)$, причем $\varphi(x)=\varphi(0,x)$ и $\psi(x)=\psi(0,x)$ могут быть любыми аналитическими в Ω функциями. При этом требовалось, чтобы $b_0(0,x)$ и $c(0,x)$ были константами.

В этой работе будем исследовать уравнение

$$z^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + zb(x)\frac{\partial u}{\partial z} + c(x)u = 0 \tag{2}$$

и покажем, что и в тех случаях, когда $b(x)$ и $c(x)$ зависят от x, оно имеет одно или два семейства решений вида

$$u_1 = z^{\rho_1(x)}\varphi(z, z\ln z, x), \quad u_2 = z^{\rho_2(x)}\psi(z, z\ln z, x),$$

где $\varphi(z, y, x)$ и $\psi(z, y, x)$ – аналитические функции всех переменных, а $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ корни определяющего урапвнения

$$\rho(\rho - 1) + b(x)\rho + c(x) = 0. \tag{3}$$

Будем предпологать, что

1) коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ являются аналитическими функциями комплексных переменных $x \in \Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \big| |x_i| < r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$;
2) коэффициенты действительны при действительных значениях аргументов;
3) оператор

$$L_2(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \tag{4}$$

сильно эллиптичен;
4) существует константа M, что $\frac{Mr}{m(x)}$, где $0 < r \leqslant \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, $m(x) = r - x_1 - x_2 - \ldots - x_n$, является общей мажорантой всех коэффициентов уравнения;
(Напомним, (см. напр. [1]) что мажорантой аналитической в окрестности точки x° функции $f(x)$ называется аналитическая функция $g(x)$, если для всех целых значений $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left|\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right| \leqslant \frac{\partial^m g}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m.$$

Факт, что $g(x)$ мажорирует $f(x)$ будем писать $f(x) \ll g(x)$.)
5) решения определяющего уравнения (3) $\rho_1 = \rho_1(x)$ и $\rho_2 = \rho_2(x)$ перенумерованы так, чтобы $\mathrm{Re}\rho_1 \geqslant \mathrm{Re}\rho_2$ а $\frac{Mr}{m(x)}$ является мажорантой для $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$.

Основной результат сформулирован ниже.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1)–5). *Если* $\nu(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x)$ *не является целым числом, то уравнение* (2) *имеет семейство аналитических при* $|z| < \delta$, $x \in \Omega$ *решений вида*

$$u(z, x) = z^{\rho_1(x)}\varphi(z, z\ln z, x),$$

причем $\varphi(0,0,x)$ *может быть любой аналитической в* Ω *функцией, для которой* $\frac{Mr}{m(x)}$ *является мажорантой. Если при этом* $\mathrm{Re}\,\nu(x) < 2$, *то существует и второе семейство*

$$u(z,x) = z^{\rho_2(x)}\psi(z, z\ln z, x),$$

где $\psi(0,0,x)$ *любая аналитическая в* Ω *функция с мажорантой* $\frac{Mr}{m(x)}$.

Положим $u = z^{\rho(x)}v$. Подставив это выражение и его производные в уравнение (2), после несложных преобразований для v получаем уравнение

$$z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+[b(x)+2\rho(x)]\,\frac{\partial v}{\partial z}+z\left[L_2(v)+tL(\rho,v)+tL_2(\rho)v+t^2L(\rho,\rho)v\right]=0, \qquad (5)$$

где $t = \ln z$,

$$L(\rho,v) = 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad L(\rho,\rho) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}.$$

Решений этого уравнения будем искать в виде ряда

$$v(z,t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(t,x)z^{2k} \qquad (6)$$

с коэффициентами $v^{(k)}$, зависящими от x, $t = \ln z$.

Подставляя (6) и его производные в уравнение (5) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем рекуррентную систему уравнений для определения $v^{(k)}(t,x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v^{(k)}}{\partial t^2} &+ (4k+\nu(x))\frac{\partial v^{(k)}}{\partial t} + 2k(2k+\nu(x))v^{(k)} = -L_2(v^{(k-1)})\\ &-t\left[L(\rho_1, v^{(k-1)}) + L_2(\rho_1)v^{(k-1)}\right] - t^2L(\rho_1,\rho_1)v^{(k-1)}, \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (7)\end{aligned}$$

Обозначим через $F_k(t,x)$ $(F_0(t,x) = 0)$ правую часть уравнений (7). Так как $\mathrm{Re}\,\nu(x) \geqslant 0$, $\nu(x) \neq 0$, то, как нетрудно проверить, его решением при $k \geqslant 1$ будет

$$v^{(k)}(t,x) = \frac{1}{\nu(x)}\int_{-\infty}^{t}\left[e^{-2k(t-s)} - e^{-(2k+\nu)(t-s)}\right]F_k(s,x)\mathrm{d}s. \qquad (8)$$

При $k = 0$ решением будет любая голоморфная в Ω функция $\varphi(x)$.

Лемма 1. *Если* $v^{(0)}(x) = \varphi(x)$ *какая либо аналитическая в* Ω *функция, то при* $k = 1, 2, 3, \dots$ *полиномиальное решение* $v^{(k)}(t, x)$ *уравнения* (7) *является полиномом* $2k$*-ой степени.*

Доказательство. За решение $v^{(0)}(x)$ уравнения (7) при $k = 0$ возьмем любую голоморфную в Ω функцию $\varphi(x)$. Тогда правая часть уравнения (7) при $k = 1$

$$-F_1(t,x) = L_2(\varphi) + t[L(\rho_1, \varphi) + L_2(\rho_1)\varphi] + t^2 L(\rho_1, \rho_1)\varphi$$

будет полиномом второй степени по t ибо $\varphi(x)$ и $\rho_1(x)$ от t не зависят. Так как $2 + \nu(x) \neq 0$, то уравнение (7) будет иметь единственное полиномиальное решение $v^{(1)}(t,x)$, полином второй степени [3]. Методом математической индукции нетрудно доказать, что при любом $k > 1$ существует единственное полиномиальное решение $v^{(k)}(t,x)$, полином $2k$-ой степени. Так как $\mathrm{Re}\,\nu(x) \geqslant 0$, то это решение, как легко проверить, представимо интегралом (8).

Пусть

$$F_k(t,x) = \sum_{l=0}^{2k} F_k^{(l)}(x) t^l.$$

Интегрируя (8) выражение по частям получаем

$$v^{(k)}(t,x) = \frac{1}{2^2 k(k + \tilde\nu(x))} \sum_{l=0}^{2k} \sum_{m=0}^{2k-l} (-1)^m \frac{(l+m)!}{2^m l! k^m} \sum_{p=0}^{m} \left(\frac{k}{k + \tilde\nu(x)} \right)^p F_k^{(l+m)}(x) t^l. \tag{9}$$

Сейчас вычислим мажоранту $v^{(1)}(t,x)$. Из (9) при $k = 1$

$$v^{(1)}(t,x) = \frac{1}{4(1 + \tilde\nu(x))} \sum_{l=0}^{2} \sum_{m=0}^{2-l} (-1)^m \frac{(l+m)!}{2^m l!} \sum_{p=0}^{m} \left(\frac{1}{1 + \tilde\nu(x)} \right)^p F_1^{(l+m)} t^l,$$

а

$$F_1^{(0)}(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \ll 2n^2 \frac{M^2 r^2}{m^4(x)},$$

$$F_1^{(1)}(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \left(2\frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \varphi(x) \right) \ll 4n^2 \frac{M^3 r^3}{m^5(x)},$$

$$F_1^{(2)}(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_j} \varphi(x) \ll n^2 \frac{M^4 r^4}{m^6(x)}.$$

По предположению $\mathrm{Re}\nu(x) \geqslant 0$ поэтому $\left|\frac{1}{1+\bar{\nu}(x)}\right| < 1$ и

$$v^{(1)}(t,x) \ll \frac{n^2M^4r^4}{4(1+\nu_0)m^6(x)}\left(2\frac{m^2(x)}{M^2r^2}+4\frac{m(x)}{Mr}+\frac{3}{2}-2t\left(2\frac{m(x)}{Mr}+1\right)+t^2\right).$$

Предположим, что $M \geqslant 10$, $\gamma > \sqrt{\frac{17}{12}}$. Тогда в области $\Omega_r = \{x|\sum_{i=1}^{n}|x_i| < r\}$, $\frac{m(x)}{Mr} \leqslant \frac{1}{5}$ и

$$v^{(1)}(t,x) \ll \frac{n^2M^4r^4}{4(1+\nu_0)m^6(x)}\frac{6}{5}\frac{7}{5}(\gamma-t)^2. \tag{10}$$

Лемма 2. *Если все коэффициенты уравнения* (2) $a_{ij}(x), b(x), c(x)$, *корни определяющего уравнения* (3) $\rho_1(x), \rho_2(x)$ *и* $v^{(o)}(x) = \varphi(x)$ *мажорируется функцией* $\frac{Mr}{m(x)}$, $\nu(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x) \neq 0$, $\min_{\sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant r_0 \leqslant r} \mathrm{Re}\nu(x) = 2\nu_0$, $M \geqslant 10$, $\gamma = 2$, *то верно мажорантное соотношение*

$$v^{(k)}(t,x) \ll N\frac{\Gamma(k+\frac{6}{5})\Gamma(k+\frac{7}{5})n^{2k}M^{3k+1}r^{3k+1}}{2^{2k}k!\Gamma(1+k+\nu_0)m^{5k+1}(x)}(\gamma-t)^{2k},$$
$$k = 0,1,2,\ldots,\quad N = \frac{\Gamma(1+\nu_0)}{\Gamma(\frac{6}{5})\Gamma(\frac{7}{5})}. \tag{11}$$

Доказательство. Соотношение (11) верно при $k=0$ и при $k=1$ ((10) формула). Согласно методу математической индукции нам достаточно доказать, что если (11)верно при $k \geqslant 1$, то оно верно и при $k+1$. Используя соотношение (11) и мажоранты для $L_2(v^{(k)})$, $L(\rho_1, v^{(k)}), L(\rho_1,\rho_1)$, $L_2(\rho_1)$ находим

$$F_{k+1}^{(l)}(x) \ll NR_k\frac{n^2M^3r^3}{m^5(x)}\frac{2k!}{(l-2)!(2k-l)!}\left[\frac{\gamma^2}{(2k+1-l)(2k+2-l)}\right.$$
$$\left.+2\left(k+\frac{2}{5}\right)\frac{\gamma}{(l-1)(2k+1-l)}+\left(k+\frac{1}{5}\right)\left(k+\frac{2}{5}\right)\frac{1}{(l-1)l}\right]\gamma^{2k-l},$$

где через R_k обозначен множитель при $(\gamma-t)^{2k}$ в соотношении (11). Подставив эти вывражения в (9) имея в виду, что $\left|\frac{k}{k+\nu(x)}\right| \leqslant 1$, для коэффициентов решения

$$v^{(k+1)}(t,x) = \sum_{l=0}^{2k+2} v_l^{(k+1)}(x)t^l,$$

получаем

$$v_l^{(k+1)}(x) \ll NR_k \frac{n^2M^3r^3\left(k+\frac{6}{5}\right)\left(k+\frac{7}{5}\right)}{4(k+1)(k+1+\nu_0)m^5(x)} \frac{(2k+2)!}{l!(2k+2-l)!}\left[\frac{(l-1)l\gamma^2}{2(2k+1)(k+1)^3}\right.$$
$$+\frac{(2k+2-l)}{(2k+1)(k+1)^2}\left(1+\frac{l+1}{2(k+1)^2}\right)\gamma+\sum_{m=0}^{2k-l}\frac{(2k+2-l)!}{(2k-l-m)!}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)^{m+1}}$$
$$\left.\times\left(m+1+\frac{(m+2)(l+m+1)}{(k+1)^2}+\frac{(m+3)(l+m+1)(l+m+2)}{4(k+1)^4}\right)\gamma^{-m}\right]\gamma^{2k-l}. \quad (12)$$

Очевидно, что

$$\frac{n^2M^3r^3\left(k+\frac{6}{5}\right)\left(k+\frac{7}{5}\right)}{4(k+1)(k+1+\nu_0)m^5(x)}R_k = R_{k+1},$$

поэтому для доказательства соотношения (11) для $k+1$ достаточно доказать, что при некотором $\gamma > 1$ множитель в квадратных скобках, (которого обозначим через $S(k,l)$) при $l = 0,1,\dots,2k$ не превышает γ^2. При этом прямым вычислением находим

$$v_{2k+2}^{(k+1)}(x) \ll NR_{k+1}, \quad v_{2k+1}^{(k+1)}(x) \ll 2NR_{k+1}\frac{(2k+2)!}{(2k+1)!}.$$

Нетрудно доказать, что при каждом фиксированном $k = 1,2,\dots$ $S(k) = S(k,0) > S(k,l)$, $l = 1,2,\dots,2k$. Последовательность $\{S(k)\}$ монотонно возрастает и

$$S(k) \leqslant \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^2 \sum_{m=0}^{2k}(m+1)\gamma^{-m}, \quad k = 1,2,\dots \quad (13)$$

Возьмем возрастающую последовательность функций

$$f_k(\tau) = \sum_{m=0}^{2k}(m+1)\tau^k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{m=0}^{2k+1}\tau^k, \quad 0<\tau<1,$$

$k = 1,2,\dots$ Ясно, что $f_k(\tau) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} f_k(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2}$. Отсюда и из (13) вытекает, что если $\gamma = \frac{1}{\tau}$, то

$$S(k) \leqslant \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2},$$

и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} S(k) = S_0 \leqslant \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2}$, и если положим $\gamma = 2$, то $S(k) \leqslant 4,\quad k = 1,2,\ldots$ Значит в (12) соотношении положив $\gamma = 2$ получаем что

$$v_l^{(k+1)}(x) \ll NR_{k+1}\frac{(2k+2)!}{(2k+2-l)!l!}2^{2k+2-l} \qquad l = 0,1,\ldots,2k+2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v^{(k+1)}(t,x) &= \sum_{l=0}^{2k+2} v_l^{(k+1)}(x)t^l \ll \sum_{l=0}^{2k+2} NR_{k+1}\frac{(2k+2)!}{(2k+2-l)!l!}2^{2k+2-l}(-t)^l \\ &= NR_{k+1}(2-t)^{2k+2}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное соотношение с (11) видим, что когда $\gamma = 2$ утверждение леммы справедливо.

Доказательство теоремы. Из (6) и (11) вытекает, что

$$v(z,t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(x,t)z^{2k} \ll N\sum_{k=0}^{\infty} R_k(2-t)^{2k}z^{2k}.$$

Последняя сумма является гипергеометрической функцией, которая сходится, если

$$|(2-t)z| = \left|z\ln\frac{e^2}{z}\right| < \frac{2\sqrt{m^5(x)}}{\sqrt{M^3r^3}}.$$

Следовательно, существует окрестность точки $z = 0$, в которой существует решение $u(z,\ln z,x)$ уравнения (2), причем $v(0,0,x) = \varphi(x)$ – любая голоморфная в Ω функция.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что при $\rho = \rho_2(x)$ в уравнениях (7) вместо $\nu(x)$ будет $-\nu(x)$. Но так как $\mathrm{Re}\nu(x) < 2$, то интеграл (8) будет существовавть. Тогда в выражении (9) вместо k необходимо брать $k-\tilde\nu(x)$, а вместо $k+\tilde\nu(x) - k$. Так как $\left|\frac{k-\tilde\nu(x)}{k}\right| \leqslant 1$, то все остальные оценки останутся справедливыми. В соотношении (11)

$$R_k = \frac{\Gamma\left(k+\frac{6}{5}\right)\left(k+\frac{7}{5}\right)n^{2k}M^{3k+1}r^{3k+1}}{2^{2k}k!\Gamma(1+k-\nu_0)m^{5k+1}(x)}, \quad 2\nu_0 = \max\mathrm{Re}\nu(x).$$

Так как $\nu_0 < 1$, то $\Gamma(1+k-\nu_0)$ определена при всех $k = 0,1,\ldots$ и мажорирующей функцией будет гипергеометрическая функция, сходящиеся в окресности $z = 0$. Следовательно будет существовать решения

$$u(z,\ln z,x) = z^{\rho_2(x)}v(z,\ln z,x)$$

уравнения (2) при любой голоморфной в Ω функции $\psi(x) = v^{(0)}(x) = v(0,0,x)$. Теорема доказана.

Литература

[1] Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, Москва (1962).

[2] А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Наука, СО, Новосибирск, (1979).

[3] Б. Квядарас, Об одной системе вырождающихся интегродифференциальныых уравнений, Сб. *Дифференциальные уравнения и их применение*, вып. 38, 38–51 (1986).

Pusiaureguliariai išsigimstanti elipsinė lygtis

B. Kvedaras

Įrodoma, kad išsigimstanti elipsinė lygtis

$$z^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + zb(x)\frac{\partial u}{+}c(z,x)u = 0,$$

su analiziniais srityje $\Omega \subset C^n$ koeficientais turi dvi sprendinių šeimas taško $z = 0$ aplinkoje turinčios pavidalą

$$u_1 = z^{\rho_1(x)}\varphi(z, z\ln z, x), \quad u_2 = z^{\rho_2(x)}\psi(z, z\ln z, x).$$

Funkcijos φ ir ψ yra analizinės visų kintamųjų funkcijos, o ρ_1 ir ρ_2 – lygties

$$\rho(\rho-1) + b(x)\rho + c(x) = 0.$$

sprendiniai.