Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 214–220

Псевдообратный оператор и один метод его построения

Зенонас НАВИЦКАС (KTU)
e-mail: zenonas.navickas@fmf.ktu.lt

1. Введение

В настоящее время все более популярными становятся методы операторного исчисления. При этом центральное место занимает задача обращения оператора, т.е. нахождение обратного оператора для данного оператора A. В случае существования обратного оператора A^{-1} задача обращения – чисто механическая, но в случае, когда он не существует, задача усложняется, так как тогда приходится ввести понятие псевдообратного оператора. В зависимости от конкретной задачи существует несколько аналогов псевдообратного оператора.

Ниже автором предлагается один из возможных вариантов определения псевдообратного оператора, который, с одной стороны, довольно общий, но, с другой стороны, его легко найти конструктивными методами при так называемом структурном разложении оператора A. Цель этой заметки – дать еще один способ построения псевдообратного оператора. При этом вводится понятие равносильных компонент, которые являются естественным дальнейшим развитием понятия существенной и вспомогательной компонент, предложеных в [1], [2], [3].

Ниже приводимые построения имеют место для любого линейного пространства, начиная от векторных и кончая разными линейнами формальными пространствами $< F;+|C >$, где F – специальным образом подобраное множество формальных рядов, а C – множество комплексных чисел [3]. Для этих пространств предъявляется лишь только одно требование – они должны обладать базисом. Так как в этом случае обычным образом можно построить линейные операторы и по надобности выделить необходимые линейные подпространства. Особенность в этой заметки приведенного определения псевдообратного оператора состоит в том, что для данного оператора A в общем случае имеются бесконечно много разных псевдообратных операторов, но это при решении разных задач не является помехой; наоборот, в некоторых случаях облегчает решение задач [2], [3]. В этом и заключается существенное отличие здесь приводимого определения псевдообратного оператора от его определений, приводимых в [4]–[7].

2. Общие построения

Пусть имеется некоторое линейное пространство $< F; +|C >$, обладающее некоторым базисом: $f_0, f_1 \ldots \in F$. Если $F_1, F_2 \subseteq F$, то естественным образом можно определить

$$F_1 \oplus F_2 \stackrel{def}{=} \{f_1 + f_2 | f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2\}, \quad F_1 \cap F_2 \stackrel{def}{=} \{f | f \in F_1,\ f \in F_2\}.$$

Пусть $< F_1; +|C >$, $< F_2; +|C >$ являются подпространствми пространства $< F; +|C >$ (в этом случае будем писать $< F_1; +|C >, < F_2; +|C > \subseteq < F; +|C >$). Тогда таковыми будут и $< F_1 \cap F_2; +|C > \subseteq < F_1 \oplus F_2; +|C > \subseteq < F; +|C >$.

Линейное подпространство $< F_0^{\perp}; + \mid C > \subseteq < F; +|C >$ будем называть дополнением линейного подпространства $< F_0; +|C > \subseteq < F; +|C >$, если $F_0 \oplus F_0^{\perp} = F; F_0 \cap F_0^{\perp} = \{0\}$.

Заметим, что, в общем случае $< F_0; +|C >$ может иметь бесконечно много разных дополнений $< F_0^{\perp}; + \mid C >$. Но лишь только

$$< F^{\perp}; + \mid C > = < \{0\}; +|C >, \quad < \{0\}^{\perp}; + \mid C > = < F; +|C > .$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие предложения, доказательства которых, ради их простоты, опускаем.

Лемма 1. *Пусть для линейных подпространств* $< F_1; +|C >$, $< F_2; +|C > \subseteq < F; +|C >$ *выполняется условие* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. *Тогда существует такое линейное подпространство* $< F_1^{\perp}; + \mid C >$, *что*

$$< F_1^{\perp}; + \mid C > \supseteq < F_2; +|C > .$$

Лемма 2. *Пусть для линейных подпространств* $< F_1; +|C >, < F_2; +|C > \subseteq < F; +|C >$ *выполняется* $F_1 \oplus F_2 = F$, *тогда существует такое линейное подпространство* $< F_1^{\perp}; + \mid C >$, *что*

$$< F_1^{\perp}; + \mid C > \subseteq < F_2; +|C > .$$

Пусть задан линейный оператор A, отображающий линейное пространство $< F; +|C >$ в себя (в этом случае будем писать $A :< F; +|C > \rightarrow < F; +|C >$). Определив

$$\operatorname{Ker} A \stackrel{def}{=} \{f | Af = 0,\ f \in F\}, \quad \operatorname{Im} A \stackrel{def}{=} \{Af | f \in F\},$$

получим четыре линейных подпространства $< \operatorname{Ker} A; +|C >$, $< (\operatorname{Ker} A)^{\perp}; + \mid C >$, $< \operatorname{Im} A; +|C >$, $< (\operatorname{Im} A)^{\perp}; + \mid C > \subseteq < F; +|C >$, связанных с линейным оператором A.

Пусть $W \stackrel{def}{=} \{A | A :< F; +|C > \to < F; +|C >\}$, тогда, естественным образом определив сумму, $A + B$, произведение $A \cdot B$ двух операторов A, B, а также и произведение αA оператора A на скаляр α, получим некоторую операторную алгебру $< W; +, \cdot \mid C >$ над линейном пространством $< F; +|C >$. При этом через 1 и 0 будем обозначать тождественный и нулевой операторы соответственно.

Замечание 1. Для любых $A, B :< F; +|C > \to < F; +|C >$ соотношение $AB = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Ker} A$.

3. Определение и общие свойства псевдообратного оператора

Определение 1. Пусть заданы операторы A и $\tilde{A}^{-1} :< F; +|C > \to < F; +|C >$. Будем говорить, что оператор $\tilde{A}^{-1}$ есть псевдообратный оператор оператору A, если выполняются соотношения:

$$A : (\operatorname{Ker} A)^{\perp} \leftrightarrow \operatorname{Im} A : \tilde{A}^{-1}; \quad \operatorname{Ker} \tilde{A}^{-1} = (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

Здесь обозначкние $A : (\operatorname{Ker} A)^{\perp} \leftrightarrow \operatorname{Im} A : \tilde{A}^{-1}$ означает взаимно однозначное соответствие мещду множествами $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ и $\operatorname{Im} A$ в том смысле, если $Af_1 = f_2$, то $\tilde{A}^{-1} f_2 = f_1$, для любых $f_1 \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ и $f_2 \in \operatorname{Im} A$.

Замечание 2. Если $\tilde{A}^{-1}$ – псевдообратный оператор оператору A, то A есть псевдообратный оператор оператору $\tilde{A}^{-1}$.

Замечание 3. В общем случае оператор A может иметь бесконечное число псевдообратных операторов, но по выбраными $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ и $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$ псевдообратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ строится однозначно. В случае $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = F$ следует, что

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1}.$$

Из определения 1 вытекает такой критерий псевдообратности двух операторов A и B. Операторы A и B псевдообратны друг другу тогда и только тогда, когда имеют место соотношения

$$ABA = A, \quad BAB = B. \tag{1}$$

Этот критерий удобен, если мы хотим проверить, является ли какой-нибуть конструктивно построенный оператор B псевдообратным оператором для данного оператора A.

Например, если $\tilde{A}_1^{-1}$ и $\tilde{A}_2^{-1}$ есть какие-нибудь псевдообратные операторы для оператора A, то с помощью критерия псевдообратности убеждаемся, что и оператор $\tilde{A}_1^{-1} A \tilde{A}_2^{-1}$ есть тоже псевдообратный оператор для оператора A.

Замечание 4. Для любого оператора $A :< F;+|C >\to< F;+|C >$ справедливы соотношения: $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} \tilde{A}^{-1})^{\perp}$; $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} \tilde{A}^{-1})^{\perp}$; $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} \tilde{A}^{-1}$; и т. д.,

$$\operatorname{Im}(1 - \tilde{A}^{-1}A) = \operatorname{Ker} A, \quad \operatorname{Im} \tilde{A}^{-1}A = (\operatorname{Ker} A)^{\perp};...;$$

для любого подпространства $< F_1;+|C >\subseteq< F;+|C >$:

$$(1 - \tilde{A}^{-1}A)(F_1) \subseteq F_1, \quad \tilde{A}^{-1}A(F_1) \subseteq F_1;\ldots;$$
$$A(1 - \tilde{A}^{-1}A) = \ldots = (1 - \tilde{A}^{-1}A)\tilde{A}^{-1} = 0.$$

Выше приведенные соотношения доказываютса непосредственно.

Лемма 3. *Для любых операторов* $B_1, B_2 :< F;+|C >\to< F;+|C >$ *имеют место соотношения:*

$$B_2\tilde{B}_1^{-1}B_1(1 - \tilde{B}_2^{-1}B_2) = 0, \quad (1 - \tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}B_2\tilde{B}_1^{-1} = 0.$$

Доказательство. Справедливость этих соотношений вытекает из следующих очевидных положений

$$\operatorname{Im} \tilde{B}_1^{-1}B_1(1 - \tilde{B}_2^{-1}B_2) = \tilde{B}_1^{-1}B_1(\operatorname{Ker} B_2) \subseteq \operatorname{Ker} B_2,$$
$$\operatorname{Im} \tilde{B}_2^{-1}B_2\tilde{B}_1^{-1} = \tilde{B}_2^{-1}B_2(\operatorname{Ker} B_1)^{\perp} \subseteq (\operatorname{Ker} B_1)^{\perp}.$$

Доказательство леммы закончено.

Из выше приведенных лемм и замечаний следуют такие выводы.

Вывод 1. Пусть для операторов $B_1, B_2 :< F;+|C >\to< F;+|C >$ выполняется соотношение

$$\operatorname{Ker} B_1 \oplus \operatorname{Ker} B_2 = F, \tag{2}$$

тогда существуют такие $(\operatorname{Ker} B_1)^{\perp}$ и $(\operatorname{Ker} B_2)^{\perp}$, для которых справедливы положения:

$$(\operatorname{Ker} B_1)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} B_2, (\operatorname{Ker} B_2)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} B_1; \tag{3}$$
$$B_1\tilde{B}_2^{-1} = 0, \quad B_2\tilde{B}_1^{-1} = 0. \tag{4}$$

Вывод 2. Пусть для операторов $B_1, B_2 :< F;+|C >\to< F;+|C >$ вьшолняется соотношение

$$\operatorname{Im} B_1 \cap \operatorname{Im} B_2 = \{0\}, \tag{5}$$

тогда существуют такие $(\operatorname{Im} B_1)^\perp$ и $(\operatorname{Im} B_2)^\perp$, для которых выполняются соотношения

$$(\operatorname{Im} B_1)^\perp \supseteq \operatorname{Im} B_2, \quad (\operatorname{Im} B_2)^\perp \supseteq \operatorname{Im} B_1, \tag{6}$$
$$\tilde{B}_2^{-1} B_1 = 0, \quad \tilde{B}_1^{-1} B_2 = 0. \tag{7}$$

4. Построение псевдообратного оператора по его равносильным компонентам

Определение 2. Пусть операторы $A, B_1, B_2 :< F; +|C >\to< F; +|C >$ таковы, что

$$A = B_1 + B_2$$

и, кроме того, для операторов B_1 и B_2 выполняются соотношения (2) и (5). Тогда будем говорить, что B_1 и B_2 суть равносильные компоненты в структурном разложении оператора A.

Теорема 1. *Если B_1, B_2 – равносильные компоненты оператора A и, кроме того,* $(\operatorname{Ker} B_1)^\perp$, $(\operatorname{Ker} B_2)^\perp$, $(\operatorname{Im} B_1)^\perp$ *и* $(\operatorname{Im} B_2)^\perp$ *подобраны так, чтобы выполнялись соотношения* (3), (6), *тогда оператор*

$$\tilde{A}^{-1} = \tilde{B}_1^{-1} + \tilde{B}_2^{-1}$$

является одним из псевдообратных оператору A.

Доказательство. В силу равносильности компонент B_1 и B_2 (тогда имеют место (4) и (7)) имеем:

$$\begin{aligned}
&(B_1 + B_2)(\tilde{B}_1^{-1} + \tilde{B}_2^{-1}) \cdot (B_1 + B_2) \\
&= \left(B_1 \tilde{B}_1^{-1} + \tilde{B}_1^{-1} \tilde{B}_2^{-1} + B_2 \tilde{B}_1^{-1} + B_2 \tilde{B}_2^{-1}\right) \cdot (B_1 + B_2) \\
&= \left(B_1 \tilde{B}_1^{-1} + B_2 \tilde{B}_2^{-1}\right) \cdot (B_1 + B_2) = B_1 \tilde{B}_1^{-1} B_1 + B_2 \tilde{B}_2^{-1} B_2 = (B_1 + B_2).
\end{aligned}$$

Тождество $(\tilde{B}_1^{-1} + \tilde{B}_2^{-1}) \cdot (B_1 + B_2)(\tilde{B}_1^{-1} + \tilde{B}_2^{-1}) = \tilde{B}_1^{-1} + \tilde{B}_2^{-1}$ доказывается аналогично. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 2. *Пусть $A = B_1 + B_2$, но для операторов B_1 и B_2 выполняется лишь только соотношение* (5) *и, кроме того,* $(\operatorname{Im} B_1)^\perp$ *и* $(\operatorname{Im} B_2)^\perp$ *подобраны так, чтобы выполнялось соотношение* (6), *тогда существуют такие псевдообратные операторы $\tilde{A}_1^{-1}$ и $\tilde{A}_2^{-1}$ для оператора A, которые представими следующим образом*

$$\tilde{A}_1^{-1} = \tilde{B}_1^{-1} + (1 - \tilde{B}_1^{-1} B_1)\tilde{B}_2^{-1}, \quad \tilde{A}_2^{-1} = (1 - \tilde{B}_2^{-1} B_2)\tilde{B}_1^{-1} + \tilde{B}_2^{-1}.$$

Доказательство. Из выше приведенных лемм и выводов имеем, что

$$\begin{aligned}
&\big(\tilde{B}_1^{-1}+(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}\big)(B_1+B_2)\big(\tilde{B}_1^{-1}+(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}\big)\\
&\quad=\big(\tilde{B}_1^{-1}B_1+(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}B_2\big)\big(\tilde{B}_1^{-1}+(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}\big)\\
&\quad=\tilde{B}_1^{-1}+(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}B_2(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}\\
&\quad=\tilde{B}_1^{-1}+(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}-(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}B_2\tilde{B}_1^{-1}B_1\tilde{B}_2^{-1}\\
&\quad=\tilde{B}_1^{-1}+(1-\tilde{B}_1^{-1}B_1)\tilde{B}_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Справедливость остальных соотношений, необходимых для доказательства теоремы, доказываются аналогично. Доказательство закончено.

Целесообразно заметить, что иногда операторы $\tilde{A}_1^{-1}$ и $\tilde{A}_2^{-1}$ совпадают.

Теорема 3. *Пусть $A=B_1+B_2$, но для операторов B_1 и B_2 выполняется лишь только соотношение (2) и, кроме того, $(\operatorname{Ker} B_1)^{\perp}$ и $(\operatorname{Ker} B_2)^{\perp}$ подобраны так, чтобы выполнялось соотношение* (3), *тогда существуют такие псевдообратные операторы $\tilde{A}_1^{-1}$ и $\tilde{A}_2^{-1}$ для оператора A, которые представими следующим образом*

$$\tilde{A}_1^{-1}=\tilde{B}_1^{-1}+\tilde{B}_2^{-1}(1-B_1\tilde{B}_1^{-1}),\tilde{A}_2^{-1}=\tilde{B}_1^{-1}(1-B_2\tilde{B}_2^{-1})+\tilde{B}_2^{-1}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

В заключение заметим, что в [1] приведено и такое представление псевдообратного оператора.

Пусть линейный оператор A представим так:

$$A=A_0-A_1$$

(A_0 – существенная, а A_1 – вспомогательная компоненты), причем $\operatorname{Im} A_0\supseteq\operatorname{Im} A_1$, и, кроме того, имеет смысл оператор $\sum_{k=0}^{+\infty}(\tilde{A}_0^{-1}A_1)^k\stackrel{def}{=}G$, (здесь $(\tilde{A}_0^{-1}A_1)^0\stackrel{def}{=}1$),

$$\tilde{A}^{-1}=G\tilde{A}_0^{-1}. \tag{8}$$

Исходя из предложенных теорем 1–3 и и соотношений (1), (4), (7), (8), а также результатов, приведенных в [3], можно построить большой набор всевозможных алгоритмов вычисления $\tilde{A}^{-1}$ для заданного линейного оператора A.

Литература

[1] Z. Navickas, Formal solution of linear differential equations, *Invited Lectures Delivared at the Eight International Colloquium on Differential Equation*, Vol. 1., Plodiv, Bulgaria pp. 81–92 (1997).

[2] Z. Navickas, Adapted formal algorithms for the solution of differential equations, *International Jounal of Differential Equations and Applications*, 1A(4), 415–424, Plodiv, Bulgaria (1999).

[3] З. Навицкас, Формальный операторный подход к построению решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Mathematical research, Theory and practice of differential equations, Vol. 7, Saint-Petersburg, *Proceedings of the Third International Conference "Differential equations and aplications"*, 88–102 (2000).

[4] Г.П. Размыслович, и др., *Геометрия и алгебра*, Москва, Университетское изд. (1987).

[5] Д.В. Беклкмишев, *Дополнительные главы линейной алгебры*, Москва, Наука (1983).

[6] В.В. Воеводин, *Линейная алгебра*, Москва, Наука (1980).

[7] Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, Наука (1967).

Definition and formation of a pseudoinverse operator

Z. Navickas

A constructive pseudoinverse operator forming algorithm is presented in the paper.