Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 221–226

Daugiamačiai A. Bicadzės sistemos analogai

Eugenijus PALIOKAS (VGTU)
el. paštas: paliokas@takas.lt

Vienai (atskirai) elipsinei antros eilės lygčiai dalinėmis išvestinėmis su pakankamai glodžiais koeficientais klasikiniai kraštiniai uždaviniai, kurie yra korektiški Laplaso lygčiai, taip pat tenkina Fredholmo alternatyvą [1].

I. Petrovskis išskyrė plačią lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemų klasę, kurios dabar vadinamos elipsinėmis pagal Petrovskį. Šių sistemų sprendiniams tinka eilė teiginių, teisingų atskiros elipsinės lygties sprendinių atžvilgiu; pavyzdžiui, pakankamai glodūs tokių sistemų sprendiniai yra analizinės funkcijos [2]. Tačiau kraštinių uždavinių elipsinėms pagal Petrovskį sistemoms išsprendžiamumo pobūdis yra iš esmės kitoks negu vienos elipsinės lygties atveju.

A. Bicadzė [3] pateikė dvimatį elipsinės pagal Petrovskį sistemos, kuriai Dirichlė uždavinys netenkina Nioter sąlygų, pavyzdį:

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_{yy} + 2v_{xy} = 0, \\ &2u_{xy} - v_{xx} + v_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Šis pavyzdys įrodė, kad kraštiniai uždaviniai elipsinėms pagal Petrovskį sistemoms nebūtinai išsprendžiami pagal Nioter, taigi, kad tokie uždaviniai būtų korektiški, reikalingos papildomos sąlygos.

M. Višik [4] apibrėžė stipriai elipsinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemų klasę ir įrodė, kad klasikiniai kraštiniai uždaviniai tokioms sistemoms išsprendžiami pagal Nioter. Tokių uždavinių korektiškumo klausimas nestipriai elipsinėms sistemoms išlieka.

Homotopinės elipsinių pagal Petrovskį sistemų klasifikacijos problema suformuluota ir nestipriai elipsinių sistemų tyrimo svarba pabrėžta [5].

Elipsines pagal Petrovskį lygčių dalinėmis išvestinėmis su dviem nepriklausomais kintamaisiais sistemas A. Bicadzė suskirstė į dvi klases: silpnai susietų ir stipriai susietų sistemų [6]. Pirmosioms Dirichlė kraštinis uždavinys visuomet išsprendžiamas pagal Nioter, o stipriai susietų sistemų atveju šitaip nėra. Silpno ir stipraus elipsinių lygčių sistemų susietumo sąvoka remiasi jų sprendinių išraiška kompleksinio kintamojo analizinėmis funkcijomis, todėl jos nepavyksta apibendrinti daugiamatėms elipsinėms sistemoms. Bet pastebėta, kad stipriai susietai elipsinei lygčių su dviem nepriklausomais kintamaisiais sistemai visada egzistuoja pusplokštumė, kurioje Dirichlė uždavinys nėra išsprendžiamas pagal Nioter [7].

Remdamiesi šia savybe, daugiamatę antros eilės elipsinę pagal Petrovskį lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemą galime vadinti stipriai susietos sistemos daugiamačiu analogu, jei egzistuoja puserdvė, kurioje Dirichlė uždavinys šiai sistemai nėra išsprendžiamas pagal Nioter.

A. Bicadzės sistema susijusi su Koši-Rymano operatoriumi, kurį galime užrašyti pavidalu

$$L_{2,2}U = \left(E\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y}\right)U,$$

kur

$$U(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egzistuoja $m \times m$-matės realios sistemos M_i, tenkinančios sąlygas [9]

$$\begin{aligned} M_i M_j &= -M_j M_i, \quad i \neq j, \\ M_i^2 &= -E. \end{aligned} \tag{2}$$

kur E – $m \times m$-matė vienetinė matrica. Sistema M tenkina antrąją (2) sąlygą.

Trimačiu Koši-Rymano sistemos apibendrinimu laikoma Moisilo-Teodoresko sistema

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z &= 0, \qquad & s_y + u_z - w_x &= 0, \\ s_x + w_y - v_z &= 0, \qquad & s_z - u_y + v_x &= 0, \end{aligned}$$

kurią galima užrašyti pavidalu

$$\bar{L}_{4,3}U = \left(M_1\frac{\partial}{\partial x} + M_2\frac{\partial}{\partial y} + M_3\frac{\partial}{\partial z}\right)U = 0, \tag{3}$$

kur $U(x,y,z) = (s,u,v,w)$, o

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Nesunku patikrinti, kad matricos M_1, M_2, M_3 tenkina (2) savybes.

Keturmatį Koši–Rymano sistemos analogą, nagrinėtą A. Janušausko [8],

$$\begin{aligned} s_t - u_x - v_y - w_z &= 0, \qquad & v_t - w_x + s_y + u_z &= 0, \\ u_t + s_x + w_y - v_z &= 0, \qquad & w_t + v_x - u_y + s_z &= 0, \end{aligned}$$

galime užrašyti

$$L_{4,4}U = \left(E\frac{\partial}{\partial t} + M_1\frac{\partial}{\partial x} + M_2\frac{\partial}{\partial y} + M_3\frac{\partial}{\partial z}\right)U = 0,$$

kur $U(t,x,y,z) = (s,u,v,w)$, o matricos M_1, M_2, M_3 apibrėžtos (4).

Pastebėsime, kad 4×4-mačių realių matricų M_i, tenkinančių (2) savybes, maksimalus skaičius yra 3, kadangi maksimalus tokių $m \times m$-matavimo realių matricų skaičius $R(m) = 2^c + 8d - 1$, kur $m = (2a+1)2^b$, $b = c + 4d$, a, b, c, d – neneigiami sveiki skaičiai ir $0 < c < 4$ [9]. Be to, jei egzistuoja pirmos eilės elipsinės tiesinės sistemos

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial x_i} U = 0, \tag{5}$$

kur $U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, su realiomis $m \times m$-matavimo pastoviomis matricomis P_i, kurios su tokio pat matavimo matricomis R_i tenkina savybes

$$R_i P_j + R_j P_i = 2a_{ij}E, \quad i, j = \overline{1, n},$$

kur $A = \|a_{ij}\|$ – teigiamai apibrėžta matrica, tai egzistuoja matricos M_i, tenkinančios (2) savybes, ir tiesinių nepriklausomų kintamųjų keitimu (5) sistema redukuojama į sistemą

$$\left(E\frac{\partial}{\partial y_n} + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right) U(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

(žr. [10]). Taigi, jei, tarkime, $m = 2t$, kur t – nelyginis skaičius, tai nėra (5) pavidalo elipsinių sistemų su daugiau kaip dviem nepriklausomais kintamaisiais.

A. Bicadzės sistemą (1) galime užrašyti

$$L_{2,2}^2 U = 0.$$

Kaip žinome, Dirichlė kraštinis uždavinys jai nėra korektiškas. Taip pat ir sistemą

$$L_{4,4}^2 U = 0$$

galime laikyti keturmačiu stipriai susietos sistemos analogu [11]. Akivaizdu, kad (3) sistema ekvivalenti sistemai

$$\left(E\frac{\partial}{\partial x} + M_2 M_1 \frac{\partial}{\partial y} + M_3 M_1 \frac{\partial}{\partial z}\right) U = 0,$$

kurią galime užrašyti

$$L_{4,3}U = \left(E\frac{\partial}{\partial x} + \bar{M}_1 \frac{\partial}{\partial y} + \bar{M}_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) U = 0,$$

kur $\bar{M}_1 = M_2M_1$, $\bar{M}_2 = M_3M_1$; $\bar{M}_1$ ir $\bar{M}_2$ tenkina (2). Tuomet sistemai

$$L_{4,3}^2 U = 0.$$

Dirichlė uždavinys puserdvėje nėra korektiškas [11], taigi, ji laikytina daugiamačiu stipriai susietų sistemų analogu. Tuo tarpu sistemos

$$\bar{L}_{4,3}^2 U = 0$$

sprendiniai yra visos harmoninės vektoriai-funkcijos.

Pažymėkime

$$L_{m,n}U = \left(E\frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} M_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) U,$$

kur $m \times m$-matės matricos M_k tenkina (2), o $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. Šį operatorių $L_{m,n}$ galime laikyti vienu iš n-mačių Košy- Rymano operatoriaus analogų.

Tuo atveju, kai $n < R(m) - 1$, pažymėkime

$$\bar{L}_{m,n}U = \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{M}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) U,$$

$M_j = \bar{M}_j$, $\bar{M}_k = M_j\bar{M}_k$, $k \neq j$, kur M_j – viena iš trūkstamų „pilno rinkinio“ M_k, tenkinančio (2), matricų.

Žemiau formuluojamo teiginio įrodymas remiasi [11] rastų Dirichlė kraštinio uždavinio puserdvėje korektiškumo sąlygų patikrinimu.

Teorema. *Elipsinių lygčių sistema $L_{m,n}^2 U = 0$ yra stipriai susietos, o sistema $\bar{L}_{m,n}^2 U = 0$ – silpnai susietos elipsinės sistemos daugiamatis analogas.*

1 pastaba. Šitokių sistemų klasė gana plati, nes matricoms M_k keliami tik (2) reikalavimai. Nurodytuose pavyzdžiuose matricos M_k yra įstrižai simetrinės, bet ši savybė nėra būtina. Pavyzdžiui, dvimačiu atveju

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix},$$

kur $bc = -1 - a^2$, tenkina (2), kai a, b, c – bet kurie realūs skaičiai, todėl aukščiau nurodytu būdu gautos sistemos $L_{2,2}^2 U = 0$ laikytinos dvimačiais A. Bicadzės sistemos analogais.

Keturmačiu atveju matricos

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau \\ 0 & 0 & \tau^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\tau^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\tau \in R$, $\tau \neq 0$, $\tau \neq 1$, taip pat tenkina (2), nors nėra įstrižai simetrinės. Dar labiau šių sistemų klasę praplečia aukščiau minėtas faktas, kad pavidalo

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial x_i} U = 0$$

sistemos tiesiniu nepriklausomų kintamųjų keitimu redukuojamos į sistemą

$$L_{m,n} U = 0.$$

2 pastaba. Iš teoremos seka, kad nurodyto pavidalo

$$L^2 U = 0$$

sistema gali būti silpnai susietos elipsinės sistemos daugiamačiu analogu tik tada, kai nepriklausomų kintamųjų skaičius mažesnis už $R(m)$, kur m – sistemos lygčių skaičius.

Literatūra

[1] К. Миранда, *Уравнения с частными производными эллиптического типа*, Москва, ИЛ. (1961).
[2] И.Г. Петровский, О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, *Успехи матем. наук*, **1**(3–4), 44–70 (1946).
[3] А.В. Бицадзе, Об единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными, *Успехи матем. наук*, **3**(6), 211–212 (1948).
[4] М.И. Вишик, О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, *Матем. Сборник*, **29**(3), 615–676 (1951).
[5] И.М. Гельфанд, И.Г. Петровский, Г.Е. Шилов, Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными, *Труды третьего всесоюзного математического сьезда*, М., изд. АН СССР, **3**, 65–72 (1958).
[6] А.В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, М. Наука (1981).
[7] Н.Е. Товмасян, Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, *Дифференциальные уравнения*, **2**(1), 3–23, **2**(2), 163–171 (1966).
[8] А. Янушаускас, О некоторых системах с частными производными второго порядка, связанных с многомерными аналогами системы Коши-Римана, Сб. *Дифференциальные уравнения и их применение*, Вильнюс, **24**, 115–140 (1980).

[9] G.N. Hile, M.H. Protter, Maximum principles for a class of first-order elliptical systems, *J. of Diff. Equations*, **24**, 136–151 (1977).

[10] G.N. Hile, Representation of solutions of a special class of first order systems, *J. of Diff. Equations*, **25**, 410–424 (1977).

[11] Э. Палекас, О задаче Дирихле для многомерных эллиптических систем, *Дифференциальные уравнения*, **17**(1), 107–114 (1981).

Multidimensional analogs of A. Bicardze system

E. Paliokas

The problem of classification of elliptic partial differential systems is studied. Two classes of multidimensional elliptic systems are defined, that are to be considered multidimensional analogs of strongly connected and weekly connected elliptic systems, defined by A. Bicadze in two-dimensional case.