Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 227–229

Об одной системе эллиптических уравнений в частных производных второго порядка

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Рассмотрим систему уравнений

$$-\Delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{l_k}} - \frac{\partial u_{l_k}}{\partial x_k}\right)\right] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

в полупространстве $H_l = \{b_1x_1 + \dots + b_nx_n > 0\}$ с граничным условием

$$u_i\Big|_{\Gamma} = f_i. \tag{2}$$

Здесь $\lambda \neq 1$, λ, a_i, b_i константы, $l_1 = n, l_k = k-1, k = 2, \dots, n$, Δ – оператор Лапласа, Γ – гиперплоскость $\{b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0\}$. Обозначим $\dot{C}^{2,0}$ класс функций из $C^2(H_l) \cap C(H_l \cup \Gamma)$ и стремящихся к нулю на бесконечности. Система (1) обобщает эллиптическую систему трех уравнений в трехмерном пространстве [1]

$$-\Delta u + \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = 0,$$
$$-\Delta v + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = 0,$$
$$-\Delta w + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = 0.$$

Решения системы будем искать в виде

$$u_i = \phi_i + (b_1x_1 + \dots + b_nx_n)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

где ϕ_i и ψ гармонические в полупространстве H_l функции, сиязанные соотношением

$$(\lambda - 2)\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(a_k b_{l_k} - a_{k+1} b_{k+1}) + \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(a_n b_{n-1} - a_1 b_1)$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi_k}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{n}a_k\Big(\frac{\partial\phi_k}{\partial x_{l_k}}-\frac{\partial\phi_{l_k}}{\partial x_k}\Big)=0. \tag{4}$$

Из граничных условии (2) и равенств (3) следует граничные условия

$$\phi_i\Big|_{\Gamma}=f_i,$$

из которых единственным образом определяются гармонические в полупространстве H_l функции ϕ_i. Обозначая

$$A_k=a_kb_{l_k}-a_{k+1}b_{k+1},\quad k=1,...,n-1,\quad A_n=a_nb_{n-1}-a_1b_1,$$
$$F=\Big[-\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi_k}{\partial x_k}-\sum_{k=1}^{n}a_k\Big(\frac{\partial\phi_k}{\partial x_{l_k}}-\frac{\partial\phi_{l_k}}{\partial x_k}\Big)\Big]\Big|_{\Gamma},$$

равенство (4) перепишем

$$\Big[(\lambda-2)\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\Big]\Big|_{\Gamma}=F. \tag{5}$$

Последнее равенство представляет собой задачу о наклонной производной для гармонической в полупространстве H_l функции ψ. Для коэффициентов a_i, b_i выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n}b_kA_k=\sum_{k=1}^{n-1}b_k(a_kb_{l_k}-a_{k+1}b_{k+1})+b_n(a_nb_{n-1}-a_1b_1)=0. \tag{6}$$

Известно, что решения задачи о наклонной производной

$$\Delta\psi=0,\ x\in D,$$
$$\sum\alpha_i(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}=f,\ x\in\partial D$$

существуют и отличаются на постоянную при любом $n\geqslant 2$, если векторное поле $(\alpha_1(x),...,\alpha_n(x))$ ни в одной точке поверхности ∂D не выходит в касательную плоскость к ∂D плоскость (см. [2] стр. 3, [3] теорема 5 V).

В нашем случае касательная плоскость совпадает с Г. Из равенства (6) следует, что векторное поле

$$((\lambda-2)b_1+A_1,...,(\lambda-2)b_n+A_n) \tag{7}$$

лежит в Г во всех точках, если $\lambda=2$. Если $\lambda\neq 2$, то векторное поле (7) ни в одной точке не выходит в Г, поскольку не все числа b_i равны нулю. Отсюда следует, что частные производные $\partial\psi/\partial x_i$ гармонической функции ψ с граничным условием (5) определяются единственным образом. Таким образом, доказана теорема.

Теорема. *Если $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 1$, f_i, $i = 1, \ldots, n$ дифференцируемы и, то задача Дирихле для системы* (1) *разрешима и ее решение единственно.*

Литература

[1] A. V. Bitsadze, *Some Classes of Equations in Partial Derivatives*, Nauka, Moskow (1981).

[2] А. Янушаускас, Об одной эллиптической системме трех уравнений в частных производных второго порядка, *Liet. matem. rink.*, 35(2), 190–197 (1995).

Apie vieną antros eilės elipsinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistemą

G. Puriuškis

n-matėje puserdvėje nagrinėjama antros eilės elipsinių n lygčių sistema, priklausanti nuo parametro λ. Įrodytas sprendinio egzistavimas ir vienatis, kai $\lambda \neq 2$.