Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 233–238

Beveik kontaktinių struktūrų paraboliniai analogai

Angelė BAŠKIENĖ (ŠU)
el. paštas: baskiene@fm.su.lt

Beveik kompleksinių (beveik dvigubų) daugdarų M hiperpaviršiuose N, kiekvieno hiperpaviršiaus taško liečiamąją erdvę papildžius beveik kontaktiniu vektoriumi, t.y. vektoriumi, kurį paveikus struktūriniu daugdaros afinoriumi gaunamas paviršiaus liečiamasis vektorius, indukuojasi elipsinio (hiperbolinio) tipo beveik kontaktinė struktūra (ϕ, ξ, η). Jei daugdaroje M egzistuoja A-metrika arba B-metrika, tai hiperpaviršių papildžius beveik kontaktiniu vektoriniu lauku, susietu su normaliniu vektoriniu lauku, jame indukuojasi I arba II rūšies atitinkamai beveik kontaktinė metrinė struktūra (ϕ, ξ, η, g) [2]. Beveik dualiųjų daugdarų hiperpaviršių struktūra tyrinėta mažiau, nes daugdaros struktūrinis afinorius apibrėžia joje išsigimusį parabolinio tipo endomorfizmą. Vis dėlto, parabolinis atvejas įdomus tuom, jog čia gaunamos savitos formulės, išvados.

1. Parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūros

Beveik kontaktinių struktūrų parabolinius analogus apibrėžiu taip.

Tarkime, jog turime m-matę diferencijuojamą daugdarą $M_m(x^a)$, $a, b, \ldots = 1, \ldots, m$, joje afinorinį lauką ϕ_a^b, vektorinį lauką ξ^b, kovektorinį lauką η_a ir funkciją $\lambda(x^a)$, tenkinančius sąlygas

$$\phi_a^b \phi_b^c = -\xi^c \eta_a, \quad \phi_a^b \eta_b = -\lambda \eta_a, \quad \phi_a^b \xi^a = -\lambda \xi^b, \quad \eta_a \xi^a = -\lambda^2. \tag{1.1}$$

Tuomet sakysime, jog tenzoriai ϕ_a^b, ξ^b, η_a ir funkcija λ apibrėžia daugdaroje M_m parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūrą. Kai $\lambda = 0$, $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūrą vadinsime parabolinio tipo beveik kontaktine struktūra ir žymėsime (ϕ, ξ, η), o daugdarą M_m vadinsime beveik kontaktine parabolinio tipo daugdara.

Jei daugdaroje M_m egzistuoja metrinis tenzorius g_{ab}, kartu su tenzoriais ϕ, ξ, η (1.1) tenkinantis papildomas sąlygas

$$\phi_a^b g_{bc} = \phi_{ac} = \rho \phi_{ca}, \quad g_{ab} \xi^b = \varepsilon \rho \eta_a, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \rho = \pm 1, \tag{1.2}$$

tuomet sakysime, jog tenzoriai $\phi_a^b, \xi^b, \eta_a, g_{ab}$ ir funkcija λ apibrėžia daugdaroje M_m parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūrą. Kai $\rho = -1$, $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūrą vadinsime I rūšies, kai $\rho = +1$, – II rūšies. Jei $\lambda = 0$, šių struktūrą vadinsime parabolinio tipo beveik kontaktine metrine struktūra ir žymėsime (ϕ, ξ, η, g); M_m vadinsime parabolinio tipo beveik kontaktine metrine daugdara.

Apibrėšime kai kurias šių struktūrų savybes. Parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūrą vadinsine integruojamąja, jeigu afinoriaus ϕ Nijenhuiso tenzorius lygus 0:

$$N^a_{cb} = \phi^e_c \nabla_e \phi^a_b - \phi^e_b \nabla_e \phi^a_c - \phi^a_e (\nabla_a \phi^c_b - \nabla_b \phi^e_a) = 0. \tag{1.3}$$

Čia konvariantinis diferencijavimas atliekamas bet kurios simetrinės afiniosios sieties atžvilgiu. $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūrą vadinsime normaliąja, jeigu daugdaroje $M_m \times R$ afinorinė struktūra

$$(\widetilde{F}^\beta_\alpha) = \begin{pmatrix} \phi^b_a & \eta_a \\ \xi^b & \lambda \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m, m+1,$$

yra integruojama, t.y. jeigu

$$\widetilde{N}^\alpha_{\gamma\beta} = \widetilde{F}^\delta_\gamma \nabla_\delta \widetilde{F}^\alpha_\beta - \widetilde{F}^\delta_\beta \nabla_\delta \widetilde{F}^\alpha_\gamma - \widetilde{F}^\alpha_\delta \left(\nabla_\gamma \widetilde{F}^\delta_\beta - \nabla_\beta \widetilde{F}^\delta_\gamma \right) = 0.$$

Kadangi afinoriaus $\widetilde{F}$ komponentės priklauso tik nuo x^a, pritaikę (1.1) gauname, jog ši lygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{aligned}
S^a_{cb} &= \widetilde{N}^a_{cb} = N^a_{cb} - \xi^a (\nabla_c \eta_b - \nabla_b \eta_c) = 0, \\
S_{cb} &= \widetilde{N}^{m+1}_{cb} = \phi^d_c (\nabla_d \eta_b - \nabla_b \eta_d) - \phi^d_b (\nabla_d \eta_c - \nabla_c \eta_d) + \nabla_c \lambda \eta_b - \nabla_b \lambda \eta_c = 0, \\
S^a_c &= \widetilde{N}^a_{c,m+1} = \xi^d (\nabla_c \phi^a_d - \nabla_d \phi^a_c) + \phi^d_c \nabla_d \xi^a + \lambda \nabla_c \xi^a = 0, \\
S_c &= \xi^d (\nabla_c \eta_d - \nabla_d \eta_c) + \phi^d_c \nabla_d \lambda + \lambda \nabla_c \lambda = 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Galima kalbėti ir apie kitas parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūros savybes, analogiškas elipsinio ir hiperbolinio tipo beveik kontaktinių metrinių struktūrų savybėms: apie 1-formos η uždarumą, kontaktiškumą, apie 2-formos $\phi_{ab} dx^a \wedge dx^b$ uždarumą $(\rho = -1)$, apie struktūrinių tenzorių kovariantinį pastovumą metrikos g Rymano sieties atžvilgiu.

2. Parabolinio tipo struktūros daugdarų $M_k(F, F^2 = 0)$ hiperpaviršiuose

Įrodysime parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūrų egzistavimą tam tikrų daugdarų hiperpaviršiuose.

Tarkime, jog turime k-matę diferencijuojamą daugdarą $M_k(y^\alpha)$, $\alpha, \beta \ldots = 1, \ldots, k$, kurioje apibrėžtas nenulinis tiesinis operatorius F^β_α, tenkinantis sąlygą

$$F^\beta_\alpha F^\gamma_\beta = 0. \tag{2.1}$$

Aišku, jog šis operatorius yra išsigimęs, o $\operatorname{rang}(F) = r$ tenkina sąlygą $1 \leqslant r \leqslant \frac{k}{2}$.

Tarkime, jog daugdaroje M_k duotas hiperpaviršius $M_{k-1}(x^a)$, $a, b \ldots = 1, \ldots, k-1$, apibrėžtas lygtimis

$$y^\alpha = y^\alpha (x^a). \tag{2.2}$$

Hiperpaviršių M_{k-1} normalizuokime, t.y. hiperpaviršiaus liečiamuosius vektorius $\vec{B}_a\left\{\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^a}\right\}$ papildykime vektoriumi $\vec{C}\{C^\alpha\}$, kartu su vektoriais $\vec{B}_a$ sudarančiu kiekviename paviršiaus taške daugdaros M_k liečiamosios erdvės bazę. Šiuos bazinius vektorius paveikiame afinoriumi F, gautus vektorius išdėstome baziniais vektoriais:

$$F(\vec{B}_a)=\phi_a^b\vec{B}_b+\eta_a\vec{C}, \quad F(\vec{C})=\xi^a\vec{B}_a+\lambda\vec{C}. \tag{2.3}$$

(2.3) lygybių abi puses paveikę afinoriumi F, pritaikę (2.1) ir (2.3), gauname, jog koeficientai ϕ_a^b, η_a, ξ^b, λ tenkina (1.1) sąlygas.

1 teorema. *Daugdaros su struktūra* F (2.1) *normalizuotame paviršiuje indukuojasi parabolinio tipo* (ϕ,ξ,η,λ)*-struktūra.*

Kai $F(\vec{C})=\vec{0}$, šią struktūrą vadinsime (ϕ,η)-struktūra. Čia tenzoriai ϕ,η tenkina sąlygas $\phi_a^b\phi_b^c=0$, $\phi_a^b\eta_b=0$.

Tarkime, jog daugdaroje M_k be afinoriaus F (2.1) egzistuoja metrika G, tenkinanti sąlygą

$$F_\alpha^\beta G_{\beta\gamma}=F_{\alpha\gamma}=\rho F_{\gamma\alpha}, \quad \rho=\pm 1. \tag{2.4}$$

Kai $\rho=-1$, metrika vadinama S-metrika, kai $\rho=1$ - B-metrika [1].

Hiperpaviršiuje M_{k-1} (2.2) indukuojasi metrika $g_{ab}=G_{\alpha\beta}B_a^\alpha B_b^\beta$. Jei kiekvieno hiperpaviršiaus taško liečiamąją erdvę papildysime normaliniu neizotropiniu ε-vienetiniu vektoriumi $\vec{C}$, tuomet iš (2.3) ir (2.4) formulių išplaukia (1.2) aksiomos, o $\lambda=\varepsilon F_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta$.

2 teorema. *Daugdaros su struktūra* F (2.1), G (2.4) *hiperpaviršiuje indukuojasi parabolinio tipo* $(\phi,\xi,\eta,g,\lambda)$*-struktūra.*

S- metrikos atveju ši struktūra yra parabolinio tipo I rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra; B-metrikos atveju gauname parabolinio tipo II rūšies $(\phi,\xi,\eta,g,\lambda)$-struktūrą.

3. $(\phi,\xi,\eta,g,\lambda)$-struktūrų pavyzdžiai

Jei daugdaros M_k, kurioje egzistuoja afinorius F (2.1), matavimas lyginis, t.y. $k=2n$, o rang$(F)=r=n$, ji vadinama beveik dualiųja daugdara [1]. Beveik dualiosios daugdaros susijusios su dualiųjų skaičių algebra $R(\varepsilon)$, $\varepsilon^2=0$, lygiai taip pat, kaip beveik kompleksinės daugdaros susijusios su kompleksinių skaičių algebra $R(i)$, $i^2=-1$, arba beveik dvigubos daugdaros su dvigubų skaičių algebra $R(e)$, $e^2=1$ [1]. Adaptuotame reperyje $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{n+i}=F(\vec{e}_i)$, afinoriaus F (2.1) matrica turi kanoninį pavidalą

$$(F_\alpha^\beta)=\begin{pmatrix} O_n & E_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}, \quad i,j,k,\ldots=1,\ldots,n, \quad \alpha,\beta,\gamma\ldots=1,2,\ldots,2n. \tag{3.1}$$

Čia O_n – nulinis n-matis blokas, E_n – n-matis vienetinis blokas.

Iš įvairių beveik dualiosios daugdaros metrikų [1], [3] pažymėsime B-metriką, kurios kanoninis pavidalas

$$({}^B G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

ir S-metriką

$$({}^S G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} O_{2p} & \begin{matrix} O_p & E_p \\ -E_p & O_p \end{matrix} \\ \begin{matrix} O_p & -E_p \\ E_p & O_p \end{matrix} & O_{2p} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

egzistuojančių daugdaroje $M_{4p}, p \in N$.

Pateiksime keletą parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$ -struktūrų pavyzdžių dualiųjų metrinių daugdarų hiperpaviršiuose.

1. Dualioje 4-matėje metrinėje erdvėje $X_4(x^1, x^2, x^3, x^4)$ su struktūriniais tenzoriais (3.1) ir (3.3) ($n = 2, p = 1$) hipersfera apibrėžiama lygtimi $x^1x^4 - x^2x^3 = c > 0$ arba $x^4 = \frac{c+x^2x^3}{x^1}$. Liečiamieji jos vektoriai yra $\vec{B}_1\left\{1, 0, 0, -\frac{c+x^2x^3}{(x^1)^2}\right\}$, $\vec{B}_2\left\{0, 1, 0, \frac{x^3}{x^1}\right\}$, $\vec{B}_3\left\{0, 0, 1, \frac{x^2}{x^1}\right\}$, o normalinis vektorius $\vec{C}\left\{-\frac{x^1}{\sqrt{2c}}, -\frac{x^2}{\sqrt{2c}}, -\frac{x^3}{\sqrt{2c}}, \frac{c+x^2x^3}{x^1\sqrt{2c}}\right\}$.

Iš (2.3) sistemos randame parabolinio tipo I rūšies $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūrą hipersferoje:

$$\begin{gathered} (\phi_a^b) = \begin{pmatrix} \frac{x^1x^2}{2c} & \frac{(x^2)^2}{2c} & 1 + \frac{x^2x^3}{2c} \\ -\frac{(x^1)^2}{2c} & -\frac{x^1x^2}{2c} & -\frac{x^1x^3}{2c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \xi^b\left(0, 0, -\frac{x^1}{\sqrt{2c}}\right), \quad \eta_a\left(\frac{x^2}{\sqrt{2c}}, -\frac{x^1}{\sqrt{2c}}, 0\right), \\ (g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{-2(c+x^2x^3)}{x^1x^1} & \frac{x^3}{x^1} & \frac{x^2}{x^1} \\ \frac{x^3}{x^1} & 0 & -1 \\ \frac{x^2}{x^1} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Nesunku patikrinti, jog ji tenkina (1.4) sąlygas, lygybę $\nabla_a \eta_b = -\frac{1}{\sqrt{2c}}\phi_a^d g_{db}$, bet netenkina (1.3). Todėl X_4 hipersferoje indukuota parabolinio tipo I rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra yra normalioji, neintegruojamoji. Ji yra Sasakio struktūros parabolinis analogas. Kadangi $\eta \wedge d\eta = 0$, ši struktūra nėra kontaktinė, todėl kaip elipsiniu atveju ji negali būti vadinama kontaktine metrine struktūra.

2. X_4 hiperpaviršiuje $x^4 = cx^3 + D(x^1, x^2)$, $c = \text{const}$, indukuota parabolinio tipo I rūšies beveik kontaktinė metrinė struktūra yra

$$(\phi_a^b) = \begin{pmatrix} \dfrac{-c}{2(D_1 + cD_2)} & \dfrac{-c^2}{2(D_1 + cD_2)} & 1 - \dfrac{cD_2}{2(D_1 + cD_2)} \\ \dfrac{1}{2(D_1 + cD_2)} & \dfrac{c}{2(D_1 + cD_2)} & \dfrac{D_2}{2(D_1 + cD_2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi^b \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2|D_1 + cD_2|}}\right), \quad \eta_a \left(\frac{wc}{\sqrt{2|D_1 + cD_2|}}, \frac{-w}{\sqrt{2|D_1 + cD_2|}}, 0\right), \tag{3.5}$$

$$w = \operatorname{sgn}(D_1 + cD_2), \quad (g_{ab}) = \begin{pmatrix} 2D_1 & D_2 & c \\ D_2 & 0 & -1 \\ c & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Čia $D_1 = \frac{\partial D}{\partial x^1}$, $D_2 = \frac{\partial D}{\partial x^2}$.

Ji tenkina (1.3) ir (1.4) sąlygas, todėl yra normalioji ir integruojamoji.

Kai $D_1 + cD_2 = d = \text{const}$ ir tik tuo atveju visi struktūriniai tenzoriai yra kovariantiškai pastovūs metrikos g_{ab} Rymano sieties atžvilgiu. Tarp tokių paviršių yra hiperplokštumos, kurioms $D_1 = \text{const}$, $D_2 = \text{const}$.

3. Dualiojoje metrinėje erdvėje $Y_4(x^1, x^2, x^3, x^4)$, kurios struktūriniai tenzoriai F ir G turi pavidalų (3.1) ir (3.2) ($n = 2$), hipersfera apibrėžiama lygtimi $x^1x^3 + x^2x^4 = c$, $c = \text{const} > 0$ arba $x^4 = \frac{c - x^1x^3}{x^2}$. Papildę hipersferą normaliniu vektoriumi $\vec{C}(x^1, x^2, x^3, x^4)/\sqrt{2c}$, iš (2.3) lygčių randame joje parabolinio tipo II rūšies $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūrą:

$$(\phi_a^b) = \begin{pmatrix} \dfrac{-(x^1)^2}{2c} & \dfrac{-x^1x^2}{2c} & 1 - \dfrac{x^1x^3}{2c} \\ \dfrac{-x^1x^2}{2c} & \dfrac{-(x^2)^2}{2c} & \dfrac{-x^3x^2}{2c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}\left\{-x^1, -x^2, -x^3 + \frac{x^1 2c}{x^{1^2} + x^{2^2}}\right\} \cdot \frac{(x^{1^2} + x^{2^2})}{\sqrt{2c}^3}, \tag{3.6}$$

$$\lambda = \frac{x^{1^2} + x^{2^2}}{2c}, \quad \eta_a \left(\frac{x^1}{\sqrt{2c}}, \frac{x^2}{\sqrt{2c}}, 0\right),$$

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{x^3}{x^2} & 1 \\ -\dfrac{x^3}{x^2} & \dfrac{2(x^1x^3 - c)}{(x^2)^2} & -\dfrac{x^1}{x^2} \\ 1 & -\dfrac{x^1}{x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Iš (3.6) po elementarių skaičiavimų išplaukia (1.3) ir (1.4) lygybės. Kadangi $\nabla_a \eta_b = \frac{1}{\sqrt{2c}} \phi_a^d g_{db} - \lambda \frac{1}{\sqrt{2c}} g_{ab}$, todėl $\nabla_a \eta_b - \nabla_b \eta_a = 0$. Vadinasi, ši struktūra yra normalioji ir integruojamoji, bet ne kontaktinė, nes 1-forma η yra uždara.

Literatūra

[1] В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин, *Пространства над алгебрами*, Изд. Казанского ун-та (1985).

[2] А. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, *Уч. зап. Казанского ун-та*, **128**(3), 55–75 (1976).

[3] Н.В. Талантова, А.П. Широков, Замечание об одной метрике в касательном расслоении, *Известия высших учебных заведений, Математика*, **6**(157), 143–146 (1975).

Parabolic almost contact structures

A. Baškienė

Parabolic analogues of almost contact structures are investigated. Parabolic $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-structure, parabolic metric $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-structure and its properties are defined.

Existence of such a structures in hypersurfaces of almost dual spaces is proved; some examples of these structures are given.