Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 251–258

Mokomųjų skaitmeninių automatinio valdymo sistemų sintezė realiame laike

Dalia BAZIUKAITĖ, Artūras BIELSKIS (KU)
el. paštas: dalia@ik.ku.lt, bielskis@ik.ku.lt

1. Įvadas

Sintezuojamos vienkontūrinės su vienetiniu neigiamu grįžtamuoju ryšiu uždarosios impulsinės skaitmeninio automatinio valdymo sistemos. Sistemoje turime penkias grandis, iš kurių trys yra proporcingosios grandys – koeficientai. Valdomoji grandis yra pozicionavimo objektas – variklis, kuri priklausomai nuo pasirinkto stebimo išėjimo parametro yra aperiodinė (parametras – sukimosi greitis) arba aperiodinė integruojanti (parametras – komandinis posūkio kampas) grandis. Kita yra variklio impulsinio valdymo ir sistemos išėjimo parametro skaitmeninio matavimo aperiodinė arba tam tikru atveju aperiodinė vėlinanti grandis. Abi šios grandys yra inertinės. Impulsinės skaitmeninės automatinio valdymo sistemos pereinamojo proceso kreivei gauti, kai sistema sutrikdyta vienetinio poveikio trikdžiu, pasinaudota Z keitimo metodu. Pasinaudojus Z perdavimo funkcijos apibrėžimu, sukonstruotas rekurentinis modelis leidžia rasti bet kurios eilės impulsinių skaitmeninių sistemų pereinamuosius procesus.

Sintezuosime tokias uždarąsias sistemas, kurių atvirosios sistemos Z perdavimo funkcija

$$K_a^*(z,0) = \frac{P_a^*(z,0)}{Q_a^*(z,0)} \tag{1}$$

neturi dešiniųjų nulių ir dešiniųjų polių (stabilios minimalios fazės sistemos) ir todėl visada tenkina uždarosios sistemos nejautrumo mažiems parametrų pasikeitimams sąlygas. Čia $P_a^*(z,0)$ atvirosios sistemos skaitiklio polinomas, $Q_a^*(z,0)$ – atvirosios sistemos charakteringasis polinomas. Ieškosime papildomos nuoseklios koreguojančiosios grandies [1,5]

$$K_n^*(z,0) = \frac{1}{K_a^*(z,0)} \cdot \frac{K_{u,opt}^*(z,0)}{1 - K_{u,opt}^*(z,0)}, \tag{2}$$

optimaliai pagal tam tikrus kriterijus uždarajai sistemai $K_{u,opt}^*(z,0)$ gauti. Optimalumo rodikliu laikysime funkcionalą $I(\sigma)$, kuris parodo pageidautino ir tikrojo uždarosios sistemos išėjimo parametro skirtumą

$$I(\sigma) = \sum_{n=0}^{p-1} F\left(\varepsilon[n,\sigma]\right) = \sum_{n=0}^{p-1} F\left(y_{i.pag}[n,0] - y_{i.}[n,0]\right). \tag{3}$$

Fiziškai realizuojamas uždarąsias pageidautinas sistemas sintezuosime pasinaudodami išraiškomis [1]

$$\begin{cases} K^*_{u,opt}(z,0) = \dfrac{P^*_a(z,0)M^*_1(z,0)}{G^*(z)}, \\ P^*_a(z,0)M^*_1(z,0) + N^*(z,0) = G(z), \end{cases} \tag{4}$$

čia $M^*_1(z,0)$ ir $N^*(z,0)$ papildomieji polinomai. Optimaliai pagal pereinamojo proceso trukmę uždarajai impulsinei sistemai pasiekti (3) funkcionalas

$$I(\sigma) = p \tag{5}$$

parodo baigtinį pereinamojo proceso periodų skaičių ir reiškia begalinį uždarosios sistemos stabilumo laipsnį. Baigtinės pereinamojo proceso sąlygos reikalauja, kad uždarosios impulsinės sistemos Z perdavimo funkcijos vardiklis būtų lygus

$$G^*(z) = z^l, \tag{6}$$

todėl

$$K^*_{u.pag}(z,0) = \frac{P^*_a(z,0)M^*_1(z,0)}{z^l}. \tag{7}$$

Pareikalaukime, kad kartu su baigtinės trukmės sąlygos įvykdymu, uždaroji sistema turėtų r eilės astatizmą, tada stacionarioji paklaida tampa lygia nuliui ir išėjimo parametras yra netrūkus tarp kvantavimo momentų. Jei atvirojoje sistemoje veikia r_0 integratorių, tai jos Z perdavimo funkcija yra

$$K^*_a(z,0) = \frac{P^*_a(z,0)}{(z-1)^{r_0}Q^*_{r_0}(z)}. \tag{8}$$

Tuomet papildomasis polinomas

$$N^*(z,0) = (z-1)^r N^*_1(z,0), \tag{9}$$

jo laipsnis

$$l_{N_1} \geqslant l_{P_a}. \tag{10}$$

Papildomojo polinomo $M^*_1(z,0)$ laipsnis

$$l_M \geqslant r-1. \tag{11}$$

Papildomieji polinomai $M^*_1(z,0)$ ir $N^*_1(z,0)$ randami iš tapatybės

$$P^*_a(z,0)M^*_1(z,0) + (z-1)^r N^*_1(z,0) = z^l. \tag{12}$$

Uždarosios sistemos charakteringojo polinomo $G(z) = z^l$ laipsnis yra

$$l = r + l_{N_1} \tag{13}$$

ir reiškia baigtinę optimalią pereinamojo proceso trukmę kvantavimo periodais

$$Min\,\{I(\sigma)\} = p_{\min} = l = r + l_{N_1} = l_{Q_a} + r - 1, \tag{14}$$

čia l_{Q_a} atvirosios sistemos charakteringojo polinomo laipsnis. Nuoseklios koreguojančiosios grandies Z perdavimo funkcija optimaliai pagal pereinamojo proceso spartą sistemai gauti yra

$$K_u^*(z,0) = \frac{Q_{r0}^*(z)M_1^*(z,0)}{(z-1)^{r-r_0}N_1^*(z,0)}, \tag{15}$$

čia $Q_{r_0}(z)$ atvirosios sistemos charakteringasis polinomas, atmetus narį $(z-1)$, r žymi uždarosios sistemos astatizmo laipsnį, o r_0 – atvirosios sistemos astatizmo laipsnį.

Išdėstytą medžiagą pritaikysime uždarųjų impulsinių greičio reguliavimo ir pozicionavimo sistemų nuoseklių koreguojančiųjų grandžių Z perdavimo funkcijoms ir optimalių pagal pereinamųjų procesų spartą uždarųjų sistemų Z perdavimo funkcijoms surasti.

2. Greičio reguliavimas

Atvirosios greičio reguliavimo sistemos Z perdavimo funkciją užrašysime (1) pavidalu. Žinome, kad atvirosios impulsinės greičio reguliavimo sistemos Z perdavimo funkcija yra [2]

$$\begin{cases} K_a^*(z,\sigma) = z^{-k}\left[c_{00} + \sum\limits_{v=1}^{2} c_{v0}\dfrac{z - z_v^{1-\gamma}}{z - z_v} z_v^{\sigma}\right], & 0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma; \\ K_a^*(z,\sigma) = z^{-k}\left[\sum\limits_{v=1}^{2} c_{v0}\dfrac{z(z_v^{\gamma} - 1)}{z - z_v} z_v^{\sigma-\gamma}\right], & \gamma \leqslant \sigma \leqslant 1. \end{cases} \tag{16}$$

Sutvarkę pirmąją sistemos lygtį gauname (1) pavidalo išraišką, kai $\sigma = 0$

$$K_a^*(z,0) = z^{-k}\left[\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}\right], \tag{17}$$

čia [2, 4] $b_2 = c_{00} + c_{10} + c_{20}$, $b_1 = c_{00}(z_1 + z_2) + c_{10}(z_1^{1-\gamma} + z_2) + c_{20}(z_1 + z_2^{1-\gamma})$, $b_1 = z_1 z_2(c_{00} + c_{10} z_1^{-\gamma} + c_{20} z_2^{-\gamma})$; $a_2 = 1$, $a_1 = -(z_1 + z_2)$, $a_0 = z_1 z_2$.

Ieškosime nuoseklios koreguojančiosios grandies Z perdavimo funkcijos (15) optimaliai pagal pereinamojo proceso spartą greičio reguliavimo sistemai gauti. Polinomus $M_1^*(z,0)$ ir $N_1^*(z,0)$ rasime iš tapatybės (12). Nustatysime polinomų $M_1^*(z,0)$,

$N_1^*(z,0)$ laipsnius. Laikysime, kad uždarojoje greičio reguliavimo sistemoje turime vieną integruojančiąją grandį, tuomet $r = 1$ ir papildomųjų polinomų $M_1^*(z,0)$ ir $N_1^*(z,0)$ laipsniai atitinkamai yra $l_{M_1} = r - 1 = 0$, $l_{N_1} = l_{P_a} = 2$, nes atvirosios greičio reguliavimo sistemos Z perdavimo funkcijos skaitiklis yra antrojo laipsnio polinomas. Remiantis (14) minimali pereinamojo proceso trukmė nagrinėjamai sistemai bus $p_{\min} = l = l_Q + r - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$. $l_{M_1} = 0$, vadinasi $M_1^*(z,0)$ yra tam tikras koeficientas ρ, o iš to, kad $l_{N_1} = 2$, seka $N_1^*(z,0) = \xi_2 z^2 + \xi_1 z + \xi_0$ yra atrojo laipsnio polinomas. Rasime koeficientus ξ_i, $i = 0 \div 2$, ρ. Įstatę atitinkamas išraiškas į tapatybę (12), gausime

$$(b_2 z^2 + b_1 z + b_0)\rho + (z-1)(\xi_2 z^2 + \xi_1 z + \xi_0) = z^2.$$

Iš tapatybės sudarę lygčių sistemą

$$\begin{cases} b_2\rho + \xi_1 = 1, \\ b_1\rho - \xi_1 + \xi_0 = 0, \\ b_0\rho - \xi_0 = 0, \\ \xi_2 = 0, \end{cases}$$

ją išsprendę ir pažymėję $B = \frac{1}{b_2+b_1+b_0}$, turėsime tokias koeficientų ξ_i, $i = 0 \div 2$, ρ išraiškas:

$$\begin{cases} \xi_0 = Bb_0, \\ \xi_1 = B(b_1 + b_0), \quad \rho = B, \\ \xi_2 = 0, \end{cases} \tag{18}$$

Papildomieji polinomai $M_1^*(z,0)$ ir $N_1^*(z,0)$ turės pavidalus

$$M_1^*(z,0) = B, \tag{19}$$

$$N_1^*(z,0) = B(b_1 + b_0)z + Bb_0. \tag{20}$$

Užrašysime greičio reguliavimo sistemos nuoseklios koreguojančiosios grandies Z perdavimo funkciją, kurią gauname į (15) įrašę surastas $M_1^*(z,0)$, $N_1^*(z,0)$ ir $Q_{r_0}(z)$ išraiškas.

$$\begin{aligned} K_u^*(z,0) &= \frac{(z-z_1)(z-z_2)B}{(z-1)B\left[(b_1+b_0)z + b_0\right]} \\ &= \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-1)\left[(b_1+b_0)z + b_0\right]} = \frac{z^2 - (z_1+z_2)z + z_1 z_2}{(b_1+b_0)z^2 - b_1 z - b_0}. \end{aligned} \tag{21}$$

Optimalios pagal pereinamųjų procesų spartą uždarosios greičio reguliavimo sistemos surastoji Z perdavimo funkcija

$$K_{u,opt}^*(z,0) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2(b_2 + b_1 + b_0)}, \tag{22}$$

gaunama pasinaudojant sistema (4). Radome nuoseklios koreguojančiosios grandies Z perdavimo funkciją (21) optimaliai pagal pereinamųjų procesų spartą greičio reguliavimo sistemai gauti, nustatėme papildomųjų polinomų koeficientus (18) ir užrašėme optimalios uždarosios greičio reguliavimo sistemos Z perdavimo funkciją (22).

3. Pozicionavimo sistema

Analogiškai greičio reguliavimo sistemai surasime nuoseklios koreguojančiosios grandies Z perdavimo funkciją optimaliai pagal pereinamųjų procesų spartą pozicionavimo sistemai gauti, nustatysime papildomųjų polinomų koeficientus ir užrašysime optimalios uždarosios pozicionavimo sistemos Z perdavimo funkciją. Anksčiau buvome gavę atvirosios pozicionavimo sistemos Z perdavimo funkciją, kurią užrašysime (1) pavidalu [2, 7].

$$\begin{cases} K_a^*(z,\sigma) = z^{-k}\left[c_{00} + c_{01}(\sigma + \frac{\gamma}{z-1}) + \sum\limits_{v=1}^{2} c_{v0}\dfrac{z - z_v^{1-\gamma}}{z - z_v} z_v^{\sigma}\right], & 0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma, \\ K_a^*(z,\sigma) = z^{-k}\left[c_{01}\frac{\gamma z}{z-1} + \sum\limits_{v=1}^{2} c_{v0}\dfrac{z(z_v^{\gamma} - 1)}{z - z_v} z_v^{\sigma-\gamma}\right], & \gamma \leqslant \sigma \leqslant 1. \end{cases} \tag{23}$$

Sutvarkę pirmąją sistemos lygtį gauname (1) pavidalo išraišką, kai $\sigma = 0$

$$K_a^*(z,0) = z^{-k}\left[\frac{b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0}{a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0}\right], \tag{24}$$

čia [2, 4, 6]

$b_3 = c_{00} + c_{10} + c_{20}$,
$b_2 = c_{00}a_2 + c_{01}\gamma - c_{10}(1 + z_1^{1-\gamma} + z_2) - c_{20}(1 + z_1 + z_2^{1-\gamma})$,
$b_1 = c_{00}a_1 - c_{01}\gamma(z_1 + z_2) + c_{10}(1 + z_1^{1-\gamma}(1 + z_2)) + c_{20}(1 + z_2^{1-\gamma}(1 + z_1))$,
$b_0 = c_{00}a_0 - c_{01}\gamma z_1z_2 - c_{10}z_1^{1-\gamma}z_2 - c_{20}z_2^{1-\gamma}z_1$,
$a_3 = 1$, $a_2 = -(1 + z_1 + z_2)$, $a_1 = z_1 + z_2 + z_1z_2$, $a_0 = -z_1z_2$.

Laikysime, kad uždarojoje pozicionavimo sistemoje turime vieną integruojančiąją grandį, tuomet $r = 1$ ir polinomo $M_1^*(z,0)$ laipsnis yra $l_{M_1} = r - 1 = 0$, o polinomo $N_1^*(z,0)$ laipsnis $l_{N_1} = l_{P_a} = 3$, nes atvirosios pozicionavimo sistemos Z perdavimo funkcijos skaitiklis yra trečiojo laipsnio polinomas. Remdamiesi (14) nustatome minimalią pereinamojo proceso trukmę nagrinėjamai sistemai. Ji bus lygi $p_{\min} = l = l_Q + r - 1 = 3 + 1 - 1 = 3$.

$M_1^*(z,0) = \rho$, $l_{N_1} = 3$, tai $N_1^*(z,0) = \xi_3z^3 + \xi_2z^2 + \xi_1z + \xi_0$. Ieškosime koeficientų ξ_i, $i = 0 \div 3$, ρ. Įstatę atitinkamas išraiškas į tapatybę (12), gausime

$$(b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0)\rho + (z-1)(\xi_3z^3 + \xi_2z^2 + \xi_1z + \xi_0) = z^3.$$

Iš tapatybės sudarę lygčių sistemą

$$\begin{cases} b_3\rho + \xi_2 = 1, \\ b_2\rho - \xi_2 + \xi_1 = 0, \\ b_1\rho - \xi_1 + \xi_0 = 0, \\ b_0\rho - \xi_0 = 0, \\ \xi_3 = 0, \end{cases}$$

ją išsprendę ir pažymėję $C = \frac{1}{b_3+b_2+b_1+b_0}$, turėsime tokias koeficientų ξ_i, $i = 0 \div 3$, ρ išraiškas:

$$\begin{cases} \xi_0 = Cb_0, \\ \xi_1 = C(b_1+b_0), \\ \xi_2 = C(b_2+b_1+b_0), \\ \xi_3 = 0, \end{cases} \quad \rho = C. \tag{25}$$

Polinomai $M_1^*(z,0)$ ir $N_1^*(z,0)$ turės pavidalus

$$M_1^*(z,0) = C, \tag{26}$$
$$N_1^*(z,0) = C(b_2+b_1+b_0)z^2 + C(b_1+b_0)z + Cb_0. \tag{27}$$

Užrašysime pozicionavimo sistemos nuoseklios koreguojančiosios grandies Z perdavimo funkciją:

$$\begin{aligned} K_u^*(z,0) &= \frac{(z-z_1)(z-z_2)C}{C\left[(b_2+b_1+b_0)z^2 + (b_1+b_0)z + b_0\right]} \\ &= \frac{z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2}{(b_2+b_1+b_0)z^2+(b_1+b_0)z+b_0}. \end{aligned} \tag{28}$$

Optimalios pagal pereinamųjų procesų spartą uždarosios pozicionavimo sistemos surastoji Z perdavimo funkcija

$$K_{u,opt}^*(z,0) = \frac{b_3z^3+b_2z^2+b_1z+b_0}{z^3(b_3+b_2+b_1+b_0)}. \tag{29}$$

4. Paprasčiausia pozicionavimo sistema

Atvirosios paprasčiausios pozicionavimo sistemos Z perdavimo funkcija, kurią radome anksčiau yra [2]

$$\begin{cases} K_a^*(z,\sigma) = z^{-k}\left[c_{00} + c_{01}\left(\sigma + \frac{\gamma}{z-1}\right) + c_{10}\frac{z-z_1^{1-\gamma}}{z-z_1}z_1^{\sigma}\right], & 0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma, \\ K_a^*(z,\sigma) = z^{-k}\left[c_{01}\frac{\gamma z}{z-1} + c_{10}\frac{z(z_1^{\gamma}-1)}{z-z_1}z_1^{\sigma-\gamma}\right], & \gamma \leqslant \sigma \leqslant 1. \end{cases} \tag{30}$$

Sistemos pirmąją lygtį perrašę (1) pavidalu gauname

$$K_a^*(z,0) = z^{-k}\left[\frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{a_2z^2+a_1z+a_0}\right], \tag{31}$$

čia [2, 4] $b_2 = c_{00}+c_{10}$, $b_1 = c_{00}(1+z_1)-c_{01}\gamma-c_{10}(1+z_1^{1-\gamma})$, $b_0 = c_{00}z_1+c_{10}z_1^{1-\gamma}$, $a_2 = 1$, $a_1 = -(1+z_1)$, $a_0 = z_1$.

Laikysime, kad uždarojoje paprasčiausioje pozicionavimo sistemoje turime vieną integruojančiąją grandį, tuomet $r = 1$ ir papildomųjų polinomų $M_1^*(z,0)$ ir $N_1^*(z,0)$ laipsniai atitinkamai yra $l_{M_1} = r-1 = 0$, $l_{N_1} = l_{P_a} = 2$. Remiantis (14) nustatome minimalią pereinamojo proceso trukmę nagrinėjamai sistemai, kuri bus lygi $p_{\min} = l = l_Q + r - 1 = 2+1-1 = 2$. $M_1^*(z,0) = \rho$. Kadangi $l_{N_1} = 2$, $N_1^*(z,0) = \xi_2z^2+\xi_1z+\xi_0$. Ieškosime koeficientų ξ_i, $i = 0 \div 2$, ρ. Iš tapatybės

$$(b_2z^2+b_1z+b_0)\rho + (z-1)(\xi_2z^2+\xi_1z+\xi_0) = z^2,$$

sudarę lygčių sistemą

$$\begin{cases} b_2\rho+\xi_1 = 1, \\ b_1\rho-\xi_1+\xi_0 = 0, \\ b_0\rho-\xi_0 = 0, \\ \xi_2 = 0, \end{cases}$$

ją išsprendę ir pažymėję $B = \frac{1}{b_2+b_1+b_0}$, turėsime koeficientų ξ_i, $i = 0 \div 3$, ρ išraiškas:

$$\begin{cases} \xi_0 = Bb_0, \\ \xi_1 = B(b_1+b_0), \quad \rho = B. \\ \xi_2 = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Polinomai $M_1^*(z,0)$ ir $N_1^*(z,0)$ turės pavidalus

$$M_1^*(z,0) = B, \tag{33}$$

$$N_1^*(z,0) = B(b_1+b_0)z + Bb_0. \tag{34}$$

Paprasčiausios pozicionavimo sistemos nuoseklios koreguojančiosios grandies Z perdavimo funkcija

$$K_u^*(z,0) = \frac{(z-z_1)B}{B\left[(b_1+b_0)z+b_0\right]} = \frac{z-z_1}{(b_1+b_0)z+b_0}. \tag{35}$$

Optimalios pagal pereinamųjų procesų spartą uždarosios paprasčiausios pozicionavimo sistemos surastoji Z perdavimo funkcija

$$K_{u,opt}^*(z,0) = \frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{z^2(b_2+b_1+b_0)}. \tag{36}$$

Pasinaudodami straipsnio pradžioje išdėstyta medžiaga, suradome uždarųjų greičio reguliavimo ir pozicionavimo sistemų nuosekliųjų koreguojančiųjų grandžių Z perdavimo funkcijas ir gavome tokių sistemų optimalias pagal pereinamųjų procesų spartą Z perdavimo funkcijas.

Literatūra

[1] Я.З. Цыпкин, *Теория линейных импульсных систем*, Москва (1963).

[2] A.A. Bielskis, D. Baziukaitė, Mokomosios skaitmeninės automatinio valdymo sistemos, *Elektronika ir elektrotechnika*, 4(33), 55–62 (2001).

[3] A.A. Bielskis, Skaitmeninių signalų apdorojimo panaudojimas mokymui, *Lietuvos mokslas'95*, III t., 7 kn., 49–50 (1995).

[4] A.A. Bielskis, Realaus laiko automatinio valdymo sistemų modeliavimas, *Elektronika ir elektrotechnika*, 4(17), 7–10 (1998).

[5] А.И. Фатеев, *Расчет автоматических систем*, Москва, Высшая школа (1973).

[6] A.A. Bielskis, Elektroninių skaitmeninių sistemų modeliavimas, *Konferencijos pranešimai, Elektronika – 2000*, 77–82 (2000).

[7] A.A. Bielskis, Elektroninių impulsinių sistemų modeliavimas, *Elektronika ir elektrotechnika*, 3(26), 65–71 (2000).

Real time synthesis of digital automatic control systems for training

D. Baziukaitė, A. Bielskis

The results of investigation of the digital automatic control systems with unitary negative feedback finding optimal serial links for their adjustment are discussed. Such links are useful optimizing system dynamics in real time, creating learning programs and applying adaptation algorithms of the automatic control systems.