Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 493–496

Смешанные билинейные дискретные решения

Вилюс БИСТРИЦКАС (Союз ученых Литвы)

1. Введение

Работа посвящена обобщению смешанных решений для дискретных многошаговых процессов оптимизации. Получены билинейные и другие процессы оптимизации, описывающие нового типа смешанные решения. Аналогичные обобщенные смешанные решения, описанные задачами непрерывного управления, получены в работах [1]–[2]. Они использованы для исследования смешанных решений трихотомической задачи о "золотодобыче" и задачи распределения капитала.

Нами рассмотренный дискретный процесс управления описывается задачей

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_0\big(t_k, x(t_k), u(t_k)\big) \to \max_{u(t_k)}, \tag{1}$$

$$x(t_{k+1}) = g\big(t_k, x(t_k), u(t_k)\big) \in R^n, \quad k \in N^\circ = \{0, \dots, N-1\}, \quad x(t_0) = x^*; \tag{2}$$

$$u(t_k) \in U = \{a(1), \dots, a(m)\} \subset R^r (k \in N^\circ), \tag{3}$$

где $x(t_k), u(t_k)$ $(k \in N^\circ)$ – соответствуюшие векторы фазовых переменных и управления в моментах времени t_k; $g_0(t_k, \dots), g(t_k, \dots) = \big(g_1(t_k, \dots), \dots, g_n(t_k, \dots)\big)$ – заданные функции, U – дискретное множество управления, состоящее из конечного числа m элементов $a(1), \dots, a(m)$. Рассмотрим процесс обобщенного смешанного решения, описанный задачей дискретного оптимального управления

$$I\big(\{\vartheta(k_i)\}\big) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{n(k)-1} f_0\big(k_i, y(t_k), y(k_i), v(k_i), \Delta(k_i)\big) \to \sup_{v(k_i)}; \tag{4}$$

$$y(k_{i+1}) = f\big(k_i, y(t_k), y(k_i), v(k_i), \Delta(k_i)\big), \tag{5}$$
$$y(\dots) = \big(y_1(\dots), \dots, y_n(\dots)\big), \quad i \in n^\circ(k) = \{0, \dots, n(k)-1\}, \ k \in N^\circ$$
$$\big(k_0 = t_k, \ k_{n(k)} = t_{k+1}, \ \Delta(k_i) = k_{i+1} - k_i > 0\big), \quad y(t_0) = x^*;$$

$$\begin{aligned}&\vartheta(k_i)\in\mathcal{V}\subset\mathcal{V}^\star=\{(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)\geqslant 0\colon\ \vartheta_i+\vartheta_j=1,\\&v_s=0;\quad i\neq j\neq s;\quad s,i,j\in m'=\{1,\dots,m\}\},\\&\{\vartheta(k_i)\}=\big(\vartheta(0_0),\dots,\vartheta(t_{N-1}),\dots\big),\end{aligned}\tag{6}$$

где $f_0(k_i,\dots), f(k_i,\dots)=\big(f_1(k_i,\dots),\dots,f_n(k_i,\dots)\big)$ – непрерывные функции по совокупности переменных, непрерывно дифференцируемы по переменным $y(k_i),\Delta(k_i)$ и удовлетворяют условиям:

1. $f_0(k_i\dots,\Delta=0)=0$,
2. $f(k_i,\dots,\Delta=0)=y(k_i)$

для всех $y(k_i),\vartheta(k_i)\quad(k\in N^\circ, i\in n^\circ(k))$.

Если $n(k)=1$ для всех $k\in N^\circ$, то задача обобщенного смешанного решения (4)–(6) становится задачей обычного смешанного решения. Условия оптимальности задачи (4)–(6) включаются в условий оптимальности экстремальных задач, рассмотренных в работах [3], [4]. В данной работе получена билинейная задача обобщенного смешанного решения.

2. Билинейные процессы смешанного решения

Обобщенное смешанное решение запишем в виде билинейного процесса оптимизации. Пусть билинейный процесс имеет вид

$$y_0(t_N)\to\max_{v_s(k_i)},\tag{4a}$$

$$y_j(k_{i+1})=\sum_{s=1}^{m}\vartheta_s(k_i)y_j(k_i)\big|\varphi_j\big(t_k,y(t_k),s\big)\big|^{\delta(k_i)}\mathrm{sign}\varphi_j(t_k,\dots,s)$$

$$\big(j\in n^\star=\{0,\dots,n\},\quad k\in N^\circ, i\in n^\circ(k)=\{0,\dots,n(k)-1\},\tag{5a}$$

$$n(k)=2l+1,\ l\in\{0,1,\dots\}\big),\ y_j(t_0)=x_j^\star,\quad(x_1^\star,\dots,x_n^\star)=x^\star,\ x_0^\star>0,$$

$$\big(\vartheta_1(k_i),\dots,\vartheta_m(k_i)\big)\in\mathcal{V}^\star\big(k\in N^\circ,\quad i\in n^\circ(k)\big),\tag{6a}$$

где $\mathcal{V}^\star$ – множество, описывающее отрезки, соединяющие точки координатных осей$(1,0,0,\dots)$ и $(0,1,0,\dots)$ и т.д.,

$$\delta(k_i)=(k_{i+1}-k_i)/\Delta(k)\quad(\Delta(k)=t_{k+1}-t_k),$$

$$\varphi_j(t_k,\dots,s)=\frac{g_j\big(t_k,\dots,a(s)\big)}{y_j(t_k)}\quad\big(j\in n'=\{1,\dots,n\}\big),$$

$$\varphi_0(t_k,\dots,s)=\frac{g_0\big(t_k,\dots,a(s)\big)+y_0(t_k)}{y_0(t_k)}.$$

Теорема 1. *Если $y_j(t_k) \neq 0$ для $j \in n^*$, $k \in N^\circ$, то билинейный процесс управления* (4a)–(6a) *определяет смешанное решение задачи* (1)–(3), *в котором альтернатива $\alpha(s)$ на k-том шаге выбирается с вероятностью*

$$p_s(k) = \frac{1}{\Delta(k)} \sum_{q=0}^{n(k)-1} \vartheta_s(k_q)\Delta(k_q), \quad (s \in m', \quad k \in N^\circ),$$

когда она смешивается не более чем с одной альтернативой в моменты k_q.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем методику, полученную в работе [1]. Мы предпологаем, что $\vartheta_s(k_i) = 1$ для всех $i \in n^\circ(k)$ и $y_j(t_k) = x_j(t_k)$ $(j \in n^*)$, $s \in m'$, где $\big(x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l)\big) = x(t_l)$ определяются рекурентными формулами (2) и

$$x_0(t_{l+1}) = x_0(t_l) + g_0\big(t_l, x(t_l), u(t_l)\big), \quad l = 0, 1, \ldots, x_0(t_0) = x_0^*.$$

Докажем соотношение

$$y_j(t_{k+1}) = x_j(t_{k+1}) \quad (k \in N^\circ, \ j \in n^*).$$

Из определения $y_j(k_1)$ имеем, что

$$y_j(k_1) = \mathrm{sign}\varphi_j(t_k, \ldots, s)\big|\varphi_j(t_k, \ldots, s)\big|^{\delta(k_0)} y_j(t_k).$$

Если $\varphi_j(t_k, \ldots, s) > 0$, то

$$y_j(k_1) = \left[\frac{g_j\big(t_k, y(t_k), a(s)\big) + \cdots}{y_j(t_k)}\right]^{\delta(k_0)} y_j(t_k).$$

Аналогичные итерации дают следующие соотношения

$$y_j(k_2) = \left[\frac{g_j\big(t_k, \ldots, a(s)\big) + \cdots}{y_j(t_k)}\right]^{\delta(k_1)} y_j(k_1) =$$

$$= \left[\frac{g_j\big(t_k, \ldots, a(s)\big) + \cdots}{y_j(t_k)}\right]^{(k_2 - t_k)/\Delta(k)} y_j(t_k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_j\big(k_{n(k)} = t_{k+1}\big) = g_j\big(t_k, \ldots, a(s)\big) + \cdots = x_j(t_{k+1}),$$

когда $\varphi_j(t_k, \ldots, s) > 0$. Если $\varphi_j(t_k, \ldots s) < 0$, то эти соотношения доказываются аналогично, ибо $\big(\mathrm{sign}\varphi_j(t_k, \ldots)\big)^{2l+1} = \mathrm{sign}\varphi_j(t_k, \ldots)$. Из определения смешанных решений получаем наше утверждение.

Литература

[1] В. Бистрицкас, Смешанные задачи календарного программирования, *Liet Matem. Rink.*, **30**, 651–655 (1990).

[2] П. Руткаускас, В. Б. Бистрицкас, Оптимальный непрерывный аналог задачи распределения динамического программирования, *Сб. Матем. методы в соц. науках*, **5**, 9–21 (1976).

[3] В. Бистрицкас, Принцип максимума для дискретно-непрерывных систем управления, *Liet. Matem. Rink.*, **28**, 432–442 (1988).

[4] L. Bittner, Necessary optimality conditions for a model of control processes, *Banach Center Publication*, **1**, 25–32 (1976).

Mišrieji bitiesiniai diskretieji sprendiniai

V. Bistrickas

Diskrečiųjų optimizavimo uždavinių mišrieji sprendiniai užrašomi bitiesiniais ir kitais diskrečiaisiais optimizavimo procesais.