Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 504–510


# Šredingerio uždavinio su stiprinimo procesu sprendimas simetrizuota išskaidymo schema

Raimondas ČIEGIS (VGTU), Violeta PAKENIENĖ (MII)
*el. paštas: rc@fm.vtu.lt, vp@fm.vtu.lt*

## 1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime uždavinį, aprašantį signalo judėjimą šviesolaidžiu. Tokio proceso matematinis modelis yra [1, 2]

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu|u|^2u+i\alpha u=0, \tag{1}$$

$$u(z,0)=0, \quad u(z,T)=0, \tag{2}$$

$$u(0,t)=u_0(t), \tag{3}$$

čia $z$ yra šviesolaidžio ašinė koordinatė, $t$ yra laikas, $\alpha$ – energijos absorbcijos koeficientas. Pradinė sąlyga aprašo seką binarinių signalų-solitonų

$$u_0(t)=\sum_{j=0}^{P}\frac{a_j}{ch(t-8j-4)}, \quad a_j=0 \text{ arba } 1.$$

Energijos nuostoliai yra kompensuojami periodiškai sustiprinant signalą taškuose $z_k=k\,\triangle\,z$:

$$u(\tilde{z}_k,t)=e^{\alpha\triangle z}u(z_k-0,t). \tag{4}$$

Darbuose [2, 3] uždavinys (1)–(3) buvo spręstas spektriniu ir baigtinių skirtumų metodais. Juose įrodyta, kad abi baigtinių skirtumų schemos yra stabilios, kai sprendžiame tiesinę Šredingerio lygtį su stiprinimo procesu. Darbe [3] buvo įrodyta, kad modifikuotos baigtinių skirtumų schemos sprendinys konverguoja ir kai sprendžiame netiesinę lygtį su stiprinimo procesu.

Šiame darbe uždaviniui (1)–(4) sukonstruosime simetrizuotą išskaidymo schemą ir įrodysime, kad šios schemos sprendinys konverguoja, o jo tikslumo eilė yra antroji abiejų kintamųjų atžvilgiu.

## 2. Baigtinių skirtumų schema

Srityje $[0, Z] \times [0, T]$ apibrėžkime tolygius diskrečiuosius tinklus

$$\begin{aligned}
&\omega_h = \{z^n\colon\ z^n = nh, \quad n = 1, 2, \ldots, M,\ z^M = L\},\\
&\omega_\tau = \{t_j\colon\ t_j = j\tau, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1 \quad t_N = T\},\\
&w_h^m = \{Z^n\colon\ Z^n = z_{m-1} + nh, \quad n = 1, 2, \ldots, K, \quad Z^K = z_m\}.
\end{aligned}$$

Diferencialinį uždavinį (1)–(3) tinklo $w_{h\tau} = w_h^m \times w_\tau$ taškuose aproksimuojame simetrine baigtinių skirtumų schema

$$\frac{y^{n+1/3} - y^n}{0.5h} + \alpha \frac{y^{n+1/3} + y^n}{2} = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&i\frac{y^{n+2/3} - y^{n+1/3}}{h} + \frac{1}{2}\Big(\frac{y^{n+2/3} + y^{n+1/3}}{2}\Big)_{\bar{t}t}\\
&+\mu \frac{|y^{n+2/3}|^2 + |y^{n+1/3}|^2}{2} \frac{y^{n+2/3} + y^{n+1/3}}{2} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+2/3}}{0.5h} + \alpha \frac{y^{n+1} + y^{n+2/3}}{2} = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&y_0^n = 0, \qquad y_N^n = 0, \qquad Z_n \in w_h^m,\\
&y_j^0 = u_0(t_j), \qquad t_j \in w_\tau.
\end{aligned}$$

Stiprinimo procesą (4) aproksimuojame lygtimi

$$V_j^m = \Big(\frac{1 + 0.25\alpha h}{1 - 0.25\alpha h}\Big)^{2K} y_j^K. \tag{8}$$

Kadangi (5) ir (7) lygtys yra tiesinės, tai jų sprendinius užrašome išreikštiniu būdu. Netiesinei lygčiai (6) spręsti sudarome konservatyvų iteracinį procesą

$$\begin{aligned}
&i\frac{\overset{s}{y} - y^{n+1/3}}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{\overset{s}{y} + y^{n+1/3}}{2}\right)_{\bar{t}t} + \mu e^{-2\alpha(z^{n+1/2} - z_m)}\\
&\times \frac{|\overset{s-1}{y}|^2 + |y^{n+1/3}|^2}{2} \frac{\overset{s}{y} + y^{n+1/3}}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Šio iteracinio proceso konvergavimas ir sprendinio vienatis yra įrodoma matematinės indukcijos metodu (išsamią sprendinio egzistavimo analizę galima rasti straipsnyje [5]). Todėl šiame straipsnyje pagrindinį dėmesį skirsime schemos (5)–(8) stabilumo analizei.

## 3. Stabilumo analizė

Tarkime, kad yra teisingi tokie aprioriniai įverčiai

$$||V_{\bar{t}}^{m-1}]| \leqslant C_1, \quad ||y_{\bar{t}}^{n}]| \leqslant C_2.$$

Schemos (5)–(8) stabilumo analizę išskaidome į dvi dalis. Pirmiausia išvesime stabilumo nelygybę funkcijoms $e^n = y^n - u^n$, $e^{n+1/3} = y^{n+1/3} - u^n$, $e^{n+2/3} = y^{n+2/3} - u^{n+1}$, $e^{n+1} = y^{n+1} - u^{n+1}$. Po to gausime pagrindinę stabilumo nelygybę funkcijoms $E^m = u(z_m, t) - V^m$.

### 3.1. *Stabilumo analizė funkcijoms $e^n$*

Funkcijos $e^n$ tenkina tokią baigtinių skirtumų schemą

$$\frac{e^{n+1/3} - e^n}{0.5h} + \alpha\frac{e^{n+1/3} + e^n}{2} = \psi_1^{n+1}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} i\,&\frac{e^{n+2/3} - e^{n+1/3}}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{n+2/3} + e^{n+1/3}}{2}\right)_{\bar{t}t} \\ &+\mu\big(f_1(u^{n+1}, u^n, y^{n+1}, y^n)e^{n+2/3} \\ &+f_2(u^{n+1}, u^n, y^{n+1}, y^n)(e^{n+2/3})^* + f_3(u^{n+1}, u^n, y^{n+1}, y^n)e^{n+1/3} \\ &+f_4(u^{n+1}, u^n, y^{n+1}, y^n)(e^{n+1/3})^*\ \big) = \psi_2^{n+1}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{e^{n+1} - e^{n+2/3}}{0.5h} + \alpha\frac{e^{n+1} + e^{n+2/3}}{2} = \psi_3^{n+1}, \tag{11}$$

kur $\psi_k^{n+1}$ yra aproksimacijos paklaidos, o $f_k$ – kvadratiniai polinomai.

Aproksimacijos paklaidas išskaidome į trijų dėmenų sumą (žr. [6])

$$\psi_k^{n+1} = \Psi_k^0 + \Psi_k^1 + \Psi_k^2, \quad k = 1, 2, 3,$$

čia $\Psi_k^0$ yra Teiloro skleidinio nariai:

$$\Psi_1^0 = -\frac{\alpha}{2}du^{n+1/2} = \mathcal{O}(1), \quad \Psi_3^0 = -\frac{\alpha}{2}du^{n+1/2} = \mathcal{O}(1),$$

$$\Psi_2^0 = -\Big(\frac{du^{n+1/2}}{dz} + \frac{1}{2}\frac{d^2u^{n+1/2}}{dt^2} + \mu|u^{n+1/2}|^2u^{n+1/2}\Big) = \mathcal{O}(1).$$

o $\Psi_k^1$ sudarome tokiu būdu

$$\Psi_1^1 = \psi_1^1 - \frac{\alpha}{2}\frac{h}{2}\Psi_1^0, \quad \Psi_2^1 = \psi_2^1 - \alpha\frac{h}{2}(2\Psi_1^0 + \Psi_2^0), \quad \Psi_3^1 = \psi_3^1 - \frac{\alpha}{2}\frac{h}{2}(\Psi_1^0 + \Psi_2^0),$$

čia $\psi_k^1$ yra Teiloro skleidinio $\mathcal{O}(h)$ eilės nariai. Atlikę nesudėtingus skaičiavimus, gauname tokias $\Psi_k^0$, $\Psi_k^1$ ir $\Psi_k^2$ išraiškas

$$\Psi_1^1 = \frac{1}{4}h\alpha(\frac{du^{n+1/2}}{dz} + \frac{1}{2}\alpha u^{n+1/2}) = \mathcal{O}(h), \quad \Psi_2^1 = 0,$$
$$\Psi_3^1 = -\frac{1}{4}h\alpha(\frac{du^{n+1/2}}{dz} + \frac{1}{2}\alpha u^{n+1/2}) = \mathcal{O}(h),$$
$$\Psi_1^2 = \mathcal{O}(h^2), \quad \Psi_2^2 = \mathcal{O}(h^2 + \tau^2), \quad \Psi_3^2 = \mathcal{O}(h^2).$$

Iš pastarųjų lygybių gauname, kad

$$\sum_{k=1}^{3} \Psi_k^j = 0, \quad j = 0, 1. \tag{12}$$

**1 lema.** *Baigtinių skirtumų schemos* (5)–(7) *sprendinio paklaida tenkina įvertį*

$$\begin{aligned}||e_{\bar{t}}^{n+1}]|^2 \leqslant (1 + Ch)^4 q^4 ||e_{\bar{t}}^{n}]|^2 + Chq^2 ||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+1/3}]|^2 \\ + q^2 Ch(1 + Ch)||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+2/3}]|^2 + Ch||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+1}]|^2,\end{aligned} \tag{13}$$

*kur* $q = (1 - 0.25\alpha h)/(1 + 0.25\alpha h)$, *o* $\Phi^{m,n+k/3}$ *yra funkcijos sudarytos iš aproksimacijos paklaidų.*

*Įrodymas.* Funkciją $e^n$ užrašome trijų funkcijų suma (žr. [6]):

$$e^{n+k/3} = v^{n+k/3} + w^{n+k/3} + p^{n+k/3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Funkcijos $v^{n+k/3}$ ir $w^{n+k/3}$ yra sprendiniai atitinkamų pagalbinių uždavinių:

$$\frac{v^{n+j/3} - v^{n+(j-1)/3}}{h} = \Psi_j^0, \qquad j = 1, 2, 3,$$
$$\frac{w^{n+j/3} - w^{n+(j-1)/3}}{h} = \Psi_j^1, \qquad j = 1, 2, 3$$

su pradinėmis sąlygomis $v^0 = 0, \quad w^0 = 0$. Iš (12) gauname, kad

$$v^{n+1} = v^n + h(\Psi_1^0 + \Psi_2^0 + \Psi_3^0) = v^n,$$
$$w^{n+1} = w^n + h(\Psi_1^1 + \Psi_2^1 + \Psi_3^1) = w^n.$$

Pasinaudoję pradinėmis sąlygomis gauname, kad $v^n = 0$, $w^n = 0$, $n = 1, 2, \ldots, K$. Funkcijoms $v^{n+1/3}, v^{n+2/3}$ ir $w^{n+1/3}, w^{n+2/3}$ įrodome įverčius:

$$v^{n+1/3} = h\Psi_1^0 = \mathcal{O}(h), \quad v^{n+2/3} = h(\Psi_1^0 + \Psi_2^0) = \mathcal{O}(h),$$
$$w^{n+1/3} = h\Psi_1^1 = \mathcal{O}(h), \quad w^{n+2/3} = h(\Psi_1^1 + \Psi_2^1) = \mathcal{O}(h).$$

Tada funkcijos $p^{n+k/2}$ tenkina baigtinių skirtumų schemą

$$\frac{p^{n+1/3}-p^n}{0.5h}+\alpha\frac{p^{n+1/3}+p^n}{2}=\Phi^{m,n+1/3}=\Psi_1^2-\frac{1}{2}\alpha h(\Psi_1^0+\Psi_1^1), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&i\frac{p^{n+2/3}-p^{n+1/3}}{h}+\frac{1}{2}\left(\frac{p^{n+2/3}+p^{n+1/3}}{2}\right)_{\bar{t}t}\\
&+\mu\big(f_1(u^{n+1},u^n,y^{n+1},y^n)p^{n+2/3}\\
&+f_2(u^{n+1},u^n,y^{n+1},y^n)(p^{n+2/3})^*+f_3(u^{n+1},u^n,y^{n+1},y^n)p^{n+1/3}\\
&+f_4(u^{n+1},u^n,y^{n+1},y^n)(p^{n+1/3})^*\big)=\Phi^{m,n+2/3},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{m,n+2/3}=\Psi_2^2-\frac{1}{2}ih(\Psi^0_{1,\bar{t}t}+\Psi^1_{1,\bar{t}t})-\mu h\big(f_3(u^{n+1},u^n,y^{n+1},y^n)(\Psi_1^0+\Psi_1^1)\\
+f_4(u^{n+1},u^n,y^{n+1},y^n)((\Psi_1^0)^*+(\Psi_1^1)^*)\big),
\end{aligned}$$

$$\frac{p^{n+1}-p^{n+2/3}}{0.5h}+\alpha\frac{p^{n+1}+p^{n+2/3}}{2}=\Phi^{m,n+1}=\Psi_3^2-\frac{\alpha}{2}h(\Psi_3^0+\Psi_3^1). \tag{16}$$

Iš lygčių (14) ir (16), pasinaudoję Švarco nelygybe ir atlikę pertvarkius, pakankamai mažiems $h$ gauname tokias dvi stabilumo nelygybes:

$$\begin{aligned}
||p_{\bar{t}}^{n+j/3}||^2 &\leqslant q^2(1+Ch)||p_{\bar{t}}^{n+(j-1)/3}||^2\\
&\quad+\frac{C_3h}{(1+0.25\alpha h)^2}||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+j/3}||^2, \quad j=1,3.
\end{aligned} \tag{17}$$

Lygčiai (15) atlikę pertvarkius, analogiškus naudotiems straipsnio [5] stabilumo nelygybės išvedime, gauname stabilumo nelygybę:

$$||p_{\bar{t}}^{n+2/3}||^2\leqslant(1+Ch)||p_{\bar{t}}^{n+1/3}||^2+Ch||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+2/3}||^2. \tag{18}$$

Iš šių nelygybių, atsižvelgę, kad $e^n=p^n$ ir $e^{n+1}=p^{n+1}$, gauname norimą stabilumo įvertį.

### 3.2. *Stabilumo analizė funkcijoms $E^n$*

Dabar išvesime pagrindinę stabilumo nelygybę.

**2 lema.** *Baigtinių skirtumų schemos* (5)–(8) *sprendinio paklaida tenkina tokį įvertį*

$$\begin{aligned}
||E_{\bar{t}}^m||^2 &\leqslant e^{5Cz_a}\Big(||E_{\bar{t}}^{m-1}||^2+Cz_a\max_{1\leqslant j\leqslant K}\big(||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+j-2/3}||^2\\
&\quad+||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+j-1/3}||^2+||\Phi_{\bar{t}}^{m,n+j}||^2\big)\Big)+\left(1+\frac{1}{Cz_a}\right)||\Psi_{3\bar{t}}^m||^2,
\end{aligned} \tag{19}$$

*kur* $\Psi_3^m$ *yra stiprinimo sąlygos aproksimacijos paklaida*

$$\Psi_3^m = \left(e^{\alpha z_a} - \frac{1}{|q|^{2K}}\right) u^{n+K}. \tag{20}$$

*Įrodymas.* Diskrečiajame tinkle $\omega_h^m$ rekurentiškai pritaikius (13) įvertį gauname

$$\begin{aligned}
&||e_{\bar{\imath}}^{n+K}]|^2 \leqslant (1+Ch)^{4K} q^{4K} ||e_{\bar{\imath}}^{n}]|^2 + Ch\Big(1 + (1+Ch)^4 q^4 + \cdots \\
&\quad + \big((1+Ch)^4 q^4\big)^{K-1}\Big) \max_{1\leqslant j\leqslant K} \big( ||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+j-2/3}]|^2 + ||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+j-1/3}]|^2 \\
&\quad + ||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+j}]|^2\big) \leqslant (1+Ch)^{4K} q^{4K} \Big( ||e_{\bar{\imath}}^{n}]|^2 + Cz_a \max_{1\leqslant j\leqslant K} \big( ||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+j-2/3}]|^2 \\
&\quad + ||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+j-1/3}]|^2 + ||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+j}]|^2 \big)\Big).
\end{aligned} \tag{21}$$

Po energijos stiprinimo žingsnio turime lygybę

$$E^{m+1} = \frac{1}{|q|^{2K}} e^{n+K} + \Psi_3^{m+1}.$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius iš pastarosios lygties gauname:

$$||E_{\bar{\imath}}^{m+1}]|^2 \leqslant \frac{1+Cz_a}{q^{4K}} ||e_{\bar{\imath}}^{n+K}]|^2 + \left(1 + \frac{1}{Cz_a}\right) ||\Psi_{3\bar{\imath}}^{m+1}]|^2. \tag{22}$$

Įstatę (21) į (22) gauname norimą stabilumo įvertį.

Aproksimacijos paklaidas įvertiname šioje lemoje.

**3 lema.** *Baigtinių skirtumų schemos* (5)–(8) *aproksimacijos paklaidos tenkina tokius įverčius*

$$\begin{aligned}
&||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+1/3}]| \leqslant C(h^2+\tau^2), \quad ||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+2/3}]| \leqslant C(h^2+\tau^2), \quad 1 \leqslant n \leqslant K, \\
&||\Phi_{\bar{\imath}}^{m,n+1}]| \leqslant C(h^2+\tau^2), \quad ||\Psi_{3\bar{\imath}}^{m}]| \leqslant Ch^2, \quad 1 \leqslant m \leqslant \frac{M}{K}.
\end{aligned}$$

*Įrodymas.* Diferencialinės lygties sprendinį $u$ ir diskretųjį sprendinį $y$ apibrėžiame už diskretaus tinklo $\omega_\tau$ ribų nelyginiu būdu

$$\begin{aligned}
&u(z,-t) = -u(z,t), \quad u(z,T+t) = -u(z,T-t), \\
&y_{-1} = -y_1, \quad y_{N+1} = -y_{N-1}.
\end{aligned}$$

Tada baigtinių skirtumų schema yra teisinga ir tinklo $\omega_\tau$ ribų kraštiniuose taškuose. Išskleidę uždavinio sprendinį $y(z,t)$ Teiloro eilute su liekamuoju nariu, užrašytu Lagranžo pavidalu, gauname norimus įverčius.

Tokiu būdu įrodėme tokią teoremą.

**1 teorema.** *Pakankamai mažiems h baigtinių skirtumų schema* (5)–(8) *turi vienintelį sprendinį, kurio globali paklaida tenkina įvertį*

$$||(u^n - y^n)_{\bar{t}}|| \leqslant C(\tau^2 + h^2).$$

## Literatūra


[1] G. Moebs, A multilevel method for the resolution of a stochastic weakly damped nonlinear Schrödinger equation, *Appl. Numer. Math.*, **26**(3), 353–375 (1998).

[2] R. Čiegis, G. Kairytė, V. Pakalnytė, Šredingerio lygties su stiprinimo procesu skaitinis sprendimas, *LMD mokslo darbai*, **3**, 409–413 (1999).

[3] R. Čiegis, V. Pakalnytė, The finite difference scheme for the solution of weakly damped nonlinear Shrodinger equation, *Int. Journal of Applied Science and Computations*, **8**(2), 175–186 (2001).

[4] R. Čiegis, Rem. Čiegis, M. Meilūnas, On one general investigation scheme of difference schemes, *Liet. matem. rink.*, **36**(4), 281–302 (1996).

[5] R. Čiegis, G. Kairytė, V. Pakalnytė, Netiesinio Šredingerio uždavinio su stiprinimo procesu sprendimas, *Liet. matem. rink.*, **4**, 337–342 (2000).

[6] I.V. Friazinov, Economical symmetrical schemes for solving boundary value problem for multidimensional parabolic equation, *Zh. vych. matem. i matem. fiziki*, **8**(2), 436–443 (1968) (in Russian).


## Symmetrical splitting scheme for nonlinear Shrödinger equation

R. Čiegis, V. Pakenienė

In this paper we consider one-dimensional nonlinear Shrödinger equation. The equation includes an absorption term and the solution is periodically amplified in order to compensate the lose of the energy. We present a finite difference approximation by a symetrical splitting scheme. The convergence of the discrete solution is proved.