Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 511–516

Tampriai plastinio uždavinio sprendimas komutuojančių matricų erdvėje

Vytautas KLEIZA (MII)
el. paštas: vytautas.kleiza@ktl.mii.lt

1. Bendras konstrukcijos aprašymas

Straipsnyje tiriamas daugiasluoksnis konstrukcinis elementas (DKE) sudarytas iš n izotropinių sluoksnių (apribotų stačiais cilindriniais paviršiais), kuris tempiamas išorinės apkrovos $\mathbf{F}$ kolinearios cilindrų sudaromosioms taip, kad jo galinės plokštumos lieka lygiagrečiomis. Esant tokioms prielaidoms visuose sluoksniuose esti centrinis tempimas (nėra deplanacijos), o DKE geometriją pilnai nusako pastarojo skerspjūvis (dvimatė, nebūtinai susijusi sritis)

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \quad D_i \bigcap D_j = , \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

čia D_i sluoksnių skerspjūviai. Tokį DKE galima pilnai aprašyti nusakant jo geometriją, sluoksnių skerspjūvio plotus

$$A_i = \iint\limits_{D_i} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

ir pastarųjų tamprumo modulius $E_1, E_2, \ldots, E_n$ (tiesinio tamprumo atveju), kuriems naudosime matricinius žymėjimus. Tegul $\mathbf{M}_n^d$ – $n \times n$ diagonalinių matricų erdvė, o DKE parametrai nusakomi sekančiomis matricomis su teigiamais diagonaliniais elementais iš erdvės $\mathbf{M}_n^{+d} \subset \mathbf{M}_n^d$: sluoksnių skerspjūvio plotų matrica $\mathbf{A} = [A_{i,j}] = A_i\delta_{ij}$, sluoksnių standumų matrica $\mathbf{B} = [B_{i,j}] = B_i\delta_{ij}$, sluoksnių tamprumo modulių matrica $\mathbf{E} = [E_{i,j}] = E_i\delta_{ij}$, sluoksnių įražų matrica $\mathbf{N} = [N_{i,j}] = N_i\delta_{ij}$, ir sluoksnių normaliųjų įtempių matrica $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{i,j}] = \sigma_i\delta_{ij}$, čia δ_{ij} – Kronekerio simbolis, o $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tokių matricų erdvėje $\mathbf{M}_n^{+d}$ galima įvesti normą $\|\mathbf{A}\| = trace\mathbf{A}$, tenkinančią visas normos aksiomas, nes $A_{ii} > 0, \forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_n^{+d}$ ir $\forall i$. Jei α_k teigiami ir $\mathbf{A}_k \in \mathbf{M}_n^{+d}$, tai $\sum\limits_k \alpha_k \mathbf{A}_k \in \mathbf{M}_n^{+d}$, yra kūgis erdvėje $\mathbf{M}_n^d$, be to matricų iš $\mathbf{M}_n^{+d}$ sandauga komutatyvi ir priklauso $\mathbf{M}_n^{+d}$. Kūgyje $\mathbf{M}_n^{+d}$ galima įvesti dalybos operaciją

$$\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \in \mathbf{M}_n^{+d},$$

nes $\mathbf{B}^{-1} = [\delta_{ij}/B_i]$ egzistuoja, jei tik $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_n^{+d}$.

Kadangi $\mathbf{M}_n^{+d}$ yra komutatyvi grupė sandaugos operacijos atžvilgiu, galima gauti kompaktiškas ieškomų parametrų išraiškas nepriklausančias nuo sluoksnių skaičiaus ir analogiškas skaliarinėms (vieno sluoksnio atvejis).

2. Tiesiškai tamprus kūnas

Tegul visi DKE sluoksniai tenkina Hooke'o dėsnį su tamprumo moduliais $\mathbf{E}$, t.y., nepriklausomai nuo apkrovos dinaminio pobūdžio pašalinus apkrovą pilnai atstato savo pirminę formą bei tūrį, tada sluoksnių $\sigma - \varepsilon$ diagramos – tai tiesių pluoštas su bendru tašku koordinačių pradžioje (histerezės kilpų nėra). Tokį DKE vadinsime tiesiškai tampriu.

Atsižvelgiant į tai, kad atskiri DKE sluoksniai negali deformuotis skirtingais dydžiais, jų deformacijos lygios $\varepsilon = \Delta l_i/l \equiv \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{I}, \tag{2}$$

čia $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{M}_n^{+d}$ skaliarinė ir teigiamai apibrėžta, $\mathbf{I} \in \mathbf{M}_n^{+d}$ vienetinė matrica. l – nedeformuoto DKE ilgis, o $\Delta l_i = \Delta l$ – pastarojo elementų absoliutūs pailgėjimai. Tada sąlygą, kad visi DKE sluoksniai tenkina Hooke'o dėsnį su tamprumo moduliais $\mathbf{E}$, galima išreikšti sekančiai

$$\boldsymbol{\sigma} = \varepsilon \mathbf{E}. \tag{3}$$

Galimi du atvejai: 1) DKE įtempto būvio vienintele priežastimi ir žinomu dydžiu yra statinė arba dinaminė apkrova $\mathbf{F}$ (DKA – statiškai neapibrėžta sistema); 2) DKE įtempto būvio vienintele priežastimi yra statinė arba dinaminė deformacija ε (DKA yra statiškai apibrėžta sistema), tačiau abiems atvejams galioja

Teiginys. *Jei DKE sudarytas iš tokių n sluoksnių tenkina Hooke'o dėsnį kaip vientisas kūnas, t.y., $\sigma_K = \varepsilon E_K$ čia σ_K ir E_K ekvivalentieji DKE įtempis ir tamprumo modulis, tada*

$$E_K = \|\mathbf{AE}\|/\|\mathbf{A}\|. \tag{4}$$

Įrodymas. Jei $N_K = |\mathbf{F}|$ DKE kaip vientiso kūno įražos modulis, o $\mathbf{N}$ įrąžos, atsirandančios atskiruose DKE sluoksniuose, tai iš statinės pusiausvyros lygties turime

$$N_K = \|\mathbf{N}\|, \tag{5}$$

o iš (3)

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{AE}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{6}$$

Atsižvelgę į tai, kad visų sluoksnių deformacijos lygios $\varepsilon_{ii} = \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, n$, sistema tampa statiškai apibrėžta ir turime

$$\|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{AE}\epsilon\| = \|\mathbf{AE}\varepsilon\|,$$

bet

$$\sigma_K = N_K/A_K = \|\mathbf{N}\|/\|A\| = \|\mathbf{AE}\|\varepsilon/\|\mathbf{A}\| = (\|\mathbf{AE}\|/\|\mathbf{A}\|)\varepsilon, \tag{7}$$

čia $A_K = \|\mathbf{A}\|$ viso DKE skerspjūvio plotas.

Teiginys. *Tegul žinomi DKE parametrai: matricų* $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ *bei DKE ilgio* l *ir apkrovos* $\mathbf{F}$ *arba deformacijos* ε, *vertės tada per pastarąsias galime išreikšti likusias DKE įtempto būvio parametrų vertes:*

Įtempto būvio priežastis – apkrova $\mathbf{F}$***:***	***Įtempto būvio priežastis – deformacija*** ε***:***
sluoksnių standžius $\mathbf{B} = \mathbf{AE}$,	*sluoksnių standžius* $\mathbf{B} = \mathbf{AE}$,
sluoksnių įrąžas $\mathbf{N} = F\mathbf{AE}/\|\mathbf{AE}\|$,	*sluoksnių įrąžas* $\mathbf{N} = \mathbf{AE}\varepsilon$,
sluoksnių normaliuosius įtempius $\sigma = F\mathbf{E}/\|\mathbf{AE}\|$,	*sluoksnių normaliuosius įtempius* $\sigma = \mathbf{E}\varepsilon$,
DKE skerspjūvio plotą $A_K = \|\mathbf{A}\|$,	*DKE skerspjūvio plotą* $A_K = \|\mathbf{A}\|$,
ekvivalentųjį tamprumo modulį $E_K = \|\mathbf{AE}\|/\|\mathbf{A}\|$,	*ekvivalentųjį tamprumo modulį* $E_K = \|\mathbf{AE}\|/\|\mathbf{A}\|$,
DKE standį $B_K = \|\mathbf{B}\|$,	*DKE standį* $B_K = \|\mathbf{B}\|$,
DKE (sluoksnio) deformaciją $\varepsilon = F/\|\mathbf{AE}\|$,	*DKE (sluoksnio) deformaciją* ε,
	DKE įrąžą $F = \|\mathbf{AE}\|\varepsilon$,
DKE absoliutų pailgėjimą $\Delta l = Fl/\|\mathbf{AE}\|$,	*DKE absoliutų pailgėjimą* $\Delta l = l\varepsilon$,
DKE normalųjį įtempį $\sigma_K = F/\|\mathbf{A}\|$.	*DKE normalųjį įtempį* $\sigma_K = \varepsilon\|\mathbf{AE}\|/\|\mathbf{A}\|$.

Įrodymas. DKE sudarančių elementų standžiai (pagal apibrėžimą)

$$\mathbf{B} = \mathbf{AE}, \tag{8}$$

tada iš (4) turime $E_K = \|\mathbf{AE}\|\big/\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}\|/\|\mathbf{A}\| = B_K\big/A_K$ arba DKE standumas

$$B_K = A_K E_K = \|\mathbf{B}\|, \tag{9}$$

Iš (3), (8) ir (9) seka, kad DKE deformacija

$$\varepsilon = N_K\big/A_K E_K = N_K/B_K = F\big/\|\mathbf{AE}\|, \tag{10}$$

o pasinaudojus (2), absoliutus DKE pailgėjimas

$$\Delta l = \varepsilon l = N_K l/B_K = Fl/\|\mathbf{AE}\|. \tag{11}$$

Matrica N turi tenkinti dvi sąlygas: statikos lygtį (5) ir matrica $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}/\mathbf{AE}$ turi turėti vienodus diagonalinius elementus, nes pagal (2) ir (10), jie reiškia kiekvieno sluoksnio deformaciją ε. Sistema

$$\begin{cases} N_K = \|\mathbf{N}\| \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}/\mathbf{AE} \end{cases} \tag{12}$$

turi vienintelį sprendinį

$$\mathbf{N} = F\,\mathbf{AE}/\mathbf{AE}. \tag{13}$$

Iš lygybės (13) randame įražas N kiekviename DKE elemente

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}/\mathbf{A} = F\,\mathbf{AE}/\mathbf{A}\|\mathbf{AE}\| = F\,\mathbf{E}/\|\mathbf{AE}\|, \tag{14}$$

o pasinaudojus (9), įtempius $\boldsymbol{\sigma}$ kiekviename DKE elemente

$$\boldsymbol{\sigma} = F\,\mathbf{E}/\|\mathbf{AE}\| = F\,\mathbf{E}/\|\mathbf{B}\|. \tag{15}$$

Teiginys. $\min\limits_i E_{ii} < E_K < \max\limits_i E_{ii}$.

Įrodymas. Tegul $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|$ iš (3) turime $E_K = \|\mathbf{AE}\|/\|\mathbf{A}\| = \|(\mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|)\mathbf{E}\| = \|\bar{\mathbf{A}}\mathbf{E}\|$, bet matricos $\bar{\mathbf{A}}$ diagonaliniai elementai teigiami ir $\|\bar{\mathbf{A}}\| = 1$, o iš čia seka, kad $\min\limits_i E_{ii} < E_K < \max\limits_i E_{ii}$.

Teiginys. *Normaliųjų įtempių santykis bet kuriuose dviejuose DKE elementuose lygus tų elementų tamprumo modulių santykiui*

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma}^*} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}^*}. \tag{16}$$

Įrodymas. Jei $\mathbf{A}^*, \mathbf{E}^*, \boldsymbol{\sigma}^*$ matricos gautos sunumeravus DKE sluoksnius bet kokia kita tvarka, tada

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma}^*} = \frac{F\mathbf{E}/\|\mathbf{AE}\|}{F\mathbf{E}^*/\|\mathbf{A}^*\mathbf{E}^*\|} = \frac{\|\mathbf{A}^*\mathbf{E}^*\|\mathbf{E}}{\|\mathbf{AE}\|\mathbf{E}^*}\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}^*} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}^*},$$

nes DKE standumas nepriklauso nuo elementų sunumeravimo tvarkos.

3. Tampriai plastinis kūnas

Įvairių autorių [1–3] pasiūlytose DKE skaičiavimo metodikose yra laikoma, kad visi DKE sluoksniai yra deformuojami tik tamprumo ribose $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_e^{(i)}$ žinoma [4], kad konstrukcijų elementuose yra leistinos plastinės deformacijos, nors jų dydžiai kartais ir nėra dideli. Visų pirma tai sakoma apie daugiastrypes konstrukcines sistemas. Tarp pastarųjų ir DKE yra tam tikra analogija, kadangi apkrovai pasiekus tokį lygį, kai viename ar net keliuose DKE sluoksniuose vyksta plastinės deformacijos, o padidėjusios apkrovos dalį perima sluoksniai, esantys tamprumo zonoje. Todėl svarbu mokėti apskaičiuoti įtempimų dydžius DKE sluoksniuose, kai dalis jų yra plastiškai ar tampriai plastiškai deformuojami. Tokio skaičiavimo metodika mums nėra žinoma. Todėl žemiau siūloma tempiamų DKE skaičiavimo metodika, atsižvelgiant į atskirų sluoksnių tampriai plastines ir plastines deformacijas. Tegul DKE ir visi jos sluoksniai deformuojasi pagal dėsnius

$$\sigma = \sigma(\varepsilon), \tag{17}$$

$$\sigma_K = \sigma_K(\varepsilon), \tag{18}$$

čia

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma_1(\varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2(\varepsilon) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n(\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad \sigma_1(\varepsilon) = \begin{cases} E_i\varepsilon, & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_e^{(i)}, \\ \sigma_i(\varepsilon), & \varepsilon_e^{(i)} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_{pl}^{(i)}, \\ \sigma_i(\varepsilon), & \varepsilon_{pl}^{(i)} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_l^{(i)}. \end{cases}$$

Jei DKE elementai intervaluose $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_e^{(i)}$ deformuojasi tampriai ir tiesiškai, intervaluose $\varepsilon_e^{(i)} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_{pl}^{(i)}$ tampriai plastiškai (tiesinė arba netiesinė stiprėjimo zona) ir intervaluose $\varepsilon_{pl}^{(i)} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_l^{(i)}$ plastiškai ($\varepsilon_l^{(i)}$ – ribinės leistinos deformacijų vertės), o funkcijos (17) ir (18) esti vienareikšmės, tai tokį kūną vadiname tampriai plastiniu. Suprantama, kad DKE sudarytam iš tokių sluoksnių šios funkcijos yra surištos, t.y., jei žinoma matricinė funkcija (17), tai pastaroji vienareikšmiai nusako funkciją (18). Jei žinoma deformacija ε tai iš statikos pusiausvyros lygties (naudojant analogiškus žymėjimus) DKE įrąžai turime

$$N_K(\varepsilon) = \|\mathbf{N}(\varepsilon)\|, \tag{19}$$

o, atsižvelgiant į tai, kad atskiri DKE elementai negali deformuotis skirtingais dydžiais, kiekvienai leistinai deformacijos vertei

$$\mathbf{N}(\varepsilon) = \mathbf{A}\sigma(\varepsilon), \tag{20}$$

$$N_K(\varepsilon) = \|\mathbf{N}(\varepsilon)\| = \|\mathbf{A}\sigma(\varepsilon)\|. \tag{21}$$

Padalinę paskutinę lygybę iš $\|\mathbf{A}\|$ turime

$$\sigma_K(\varepsilon) = N_K(\varepsilon)/\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\sigma(\varepsilon)\|/\|\mathbf{A}\|. \tag{22}$$

Atsižvelgiant matricinės funkcijos (17) struktūrą, DKE turi tris kokybiškai skirtingas deformavimosi zonas: tampriąją $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_e^{(i)}$, kurioje galioja (4), (7)–(11), (14) ir

(16), tampriai plastinę ir plastinę $\min\limits_{l\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_e^{(i)} \leqslant \varepsilon \leqslant \max\limits_{l\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_{pl}^{(i)}$, kuriuose galioja tik (17)–(22), o tamprumo modulio sąvoka praranda prasmę. Jei žinoma deformacija **F** tai statinio neapibrėžtumo pašalinimui būtina spręsti netiesinę lygtį

$$\|\mathbf{N}(\varepsilon)\| = F \tag{23}$$

ε atžvilgiu, kas nesudaro ypatingų sunkumų, jei funkcijos $\sigma_i(\varepsilon)$ yra vienareikšmės ir griežtai monotoninės. Jei ε_0 lygties (23) sprendinys, tai visi DKE parametrai randami iš (20)–(23) įstačius ε_0 vertę. Toks sprendimo būdas apima (kaip atskirus atvejus) idealizuotus Prandtl'io [4] ir tiesiško stiprėjimo atvejus. Jei žinomos natūrinės, o ne schematizuotos $\sigma - \varepsilon$ diagramos visų medžiagų, sudarančių DKE, tai bet kuriam deformacijos dydžiui galima tiesiog iš diagramų nustatyti įtempimų reikšmes, kurias įrašę į (22) lygtį, gautume DKE ekvivalentinį įtempimą, pagal kurį galime apskaičiuoti ribinį ašinės apkrovos dydį duotų matmenų ir konfigūracijos DKE.

Pasiūlyta daugiasluoksnių strypų skaičiavimo metodika įgalina apskaičiuoti ašinio standumo, normaliojo įtempimo reikšmes bei ribinį ašinės apkrovos dydį tampraus, tampriai plastinio deformavimo stadijose, kai jį sudarančių medžiagų deformavimo diagramos $\sigma - \varepsilon$ atitinka idealiai tampriai-plastinių ir tampriai-stiprėjančių medžiagų schematizuotas diagramas.

Literatūra

[1] V. Paulauskas, J. Bareišis, Calculation metodics of thin-walled construction made of composite materials, *Composite Desing, Ninth International Conference on Composite Materials*, Madrid, 848–853 (1993).

[2] G. Marčiukaitis, *Statybinių kompozitų kūrimo ir savybių prognozavimo principai*, Vilnius (1998).

[3] B.B. Васильев, *Механика конструкций из композиционных материалов*, Москва (1988).

[4] A. Čižas, *Medžiagų atsparumas, konstrukcinių elementų mechanika*, Vilnius (1993).

On solving the plastoelastic problen in space of the commutative matrixes

V. Kleiza

A method for calculating mechanical parameters of multilayer structural elements (MSE) and their layers in elastic and plastoelastic zones are presented and grounded in the case of axial stretching. The method of diagonal matrices is proposed to define the parameters of MSE's and their layers. In the elastic zone, MCE's are completely defined by two matrices: that of the modulus of elasticity and layer cross-section areas. In the plastoelastic zone, - by the matrix of the layer cross-section areas and a diagonal matrix-function that defines $\sigma - \varepsilon$ diagrams of the layers. In the case of stretching, the above mentioned matrices make up a commutative group with respect to product operation which makes it possible to obtain compact expressions for the required parameters that do not depend on the number of layers and are analogous to scalar ones (a single-layer case). This kind of calculation methods enables us to compute the values of axial stiffness and normal stress as well as the quantity of limiting axial load or the zones areas of elastic and plastoelastic deformation, when the diagrams $\sigma - \varepsilon$ of deformation materials composing it correspond to that diagram that of plastoelastic and elastically-strengthening materials.