Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 552–558

Nešo pusiausvyros iškiliųjų aibių kontekste

Daina SŪDŽIŪTĖ (VU)
el. paštas: daina.sudziute@maf.vu.lt

Nulinės sumos vienetinio kvadrato lošimuose pakeitę branduolius pagrindinės įstrižainės taškuose, gauname nenulinės sumos lošimus, kuriuose ne tik išlieka [1] aprašytos Nešo pusiausvyros, bet ir gali atsirasti naujų, kurių spektrai yra baigtinės aibės. Šių pusiausvyrų abiejų lošėjų strategijų spektrai sutampa. O egzistavimas pagrindinai priklauso nuo branduolių reikšmių spektrų taškuose. T.y. pirmiausia tenka išnagrinėti kvadratinį bimatricinį lošimą (jei matricas sudaro branduolių reikšmės tam tikruose taškuose) Nešo pusiausvyrų, sudarytų iš mišrių strategijų, naudojančių grynąsias strategijas su teigiamomis tikimybėmis, egzistavimo požiūriu.

Paprasčiausias dviejų taškų spektro atvejis yra išanalizuotas [3]. Čia nagrinėsime trijų spektro taškų atvejį – jis suvedamas į kvadratinio bimatricinio (3×3) lošimo sprendimą.

Taigi, šio darbo turinys – bimatricinio (3×3) lošimo analizė Nešo pusiausvyrų, kurių strategijų visos komponentės teigiamos, egzistavimo požiūriu. Įrodymuose remsimės klasikine iškiliąja analize.

Pagrindinės sąvokos ir žymėjimai:

Bimatricinis lošimas apibrėžiamas matrica

$$A, B = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & (a_{13}, b_{13}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & (a_{23}, b_{23}) \\ (a_{31}, b_{31}) & (a_{32}, b_{32}) & (a_{33}, b_{33}) \end{pmatrix},$$

kurią sudaro atitinkamai pirmojo ir antrojo lošėjų išlošių matricos $A = (a_{ij})_{(3\times3)}$, $B = (b_{ij})_{(3\times3)}$. Laikysime, kad matricoje A nėra nei vienodų stulpelių, nei stulpelio su vienodais skaičiais, o matricoje B nėra nei vienodų eilučių, nei eilutės, kurios skaičiai būtų vienodi.

Grynosios strategijos: abu lošėjai turi po tris grynąsias strategijas – pirmasis lošėjas renkasi matricos eilutes, antrasis – stulpelius.

Mišriosiomis strategijomis vadiname tikimybinius skirstinius grynųjų strategijų aibėse. Abiejų lošėjų mišriųjų strategijų aibės Ω_1 ir Ω_2 yra vienodos; jas žymėsime Ω:

$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) | \gamma_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3;\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1\}$.

Situacija vadiname strategijų porą – po vieną kiekvienam lošėjui:

$(\alpha, \beta) = ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3))$, $\quad \alpha \in \Omega_1 = \Omega; \quad \beta \in \Omega_2 = \Omega$.

Lošėjų išlošiai apibrėžiami kaip $\alpha A \beta$, $\alpha B \beta$ (atitinkamai pirmam ir antram lošėjui) situacijų aibėje $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Nešo pusiausvyra vadiname fiksuotą situaciją $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, kuriai teisingos nelygybės:

$$\alpha A\bar{\beta} \leqslant \bar{\alpha}A\bar{\beta}, \quad \text{visiems } \alpha \in \Omega_1, \tag{1}$$

$$\bar{\alpha}B\beta \leqslant \bar{\alpha}B\bar{\beta}, \quad \text{visiems } \beta \in \Omega_2, \tag{2}$$

Pusiausvyrine strategija vadinsime kiekvieną strategiją, įeinančią į Nešo pusiausvyrą. *Išlošius pusiausvyros situacijoje* žymėsime $\bar{\alpha}A\bar{\beta} = v, \quad \bar{\alpha}B\bar{\beta} = w$.

Matricų A ir B *vektorius-eilutes* ir *vektorius-stulpelius* žymėsime taip:
$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), \quad b_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), \quad i = 1,2,3,$
$A_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}), \quad B_j = (b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}), \quad j = 1,2,3.$

Kiekvienam vektoriui-stulpeliui A_j, $j = 1,2,3$, ir kiekvienam vektoriui-eilutei b_i, $i = 1,2,3$, priskirsime po *vektoriaus komponenčių cikliškų skirtumų vektorių*, kuriuos apibrėšime ir žymėsime taip:
$\Delta A_j = (a_{3j} - a_{2j}, a_{1j} - a_{3j}, a_{2j} - a_{1j}), \quad j = 1,2,3,$
$\Delta b_i = (b_{i3} - b_{i2}, b_{i1} - b_{i3}, b_{i2} - b_{i1}), \quad i = 1,2,3.$

Kai teks operuoti su visais trim vektoriais iš aibės $\{A_1, A_2, A_3\}$, pasirinkus vieną iš jų, pasirinktąjį vektorių žymėsime A_j ($j = 1,2,3$). Likusius du skirtingus vektorius žymėsime A_l, A_k.

Taip pat, pasirinkę vektorių b_i, $i = 1,2,3$, iš aibės $\{b_1, b_2, b_3\}$, likusius du vektorius žymėsime b_l, b_k.

Įrodymuose naudosime ir trimačius vektorius, kuriuos žymėsime taip:
$X = (x_1, x_2, x_3), \quad Y = (y_1, y_2, y_3), \quad \mathbf{O} = (0,0,0).$

Akivaizdu, kad teisingi tokie du tvirtinimai:

1 lema. *Jei pusiausvyrinė strategija* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, *tai*

$$\langle a_i, \bar{\beta} \rangle = v \ \text{ visiems } \ i = 1,2,3. \tag{3}$$

Jei pusiausvyrinė strategija $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, *tai*

$$\langle \bar{\alpha}, B_j \rangle = w \ \text{ visiems } \ j = 1,2,3. \tag{4}$$

Lemoje esančios (3) ir (4) lygybės yra atitinkamai ekvivalenčios vektorinėms lygybėms:

$$\bar{\beta}_1 A_1 + \bar{\beta}_2 A_2 + \bar{\beta}_3 A_3 = (v, v, v), \tag{5}$$

$$\bar{\alpha}_1 b_1 + \bar{\alpha}_2 b_2 + \bar{\alpha}_3 b_3 = (w, w, w). \tag{6}$$

2 lema. *Situacija* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, *kurioje* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, *yra Nešo pusiausvyra tada ir tik tada, kai patenkintos (5) ir (6) sąlygos.*

1 lemos rezultatus ir (5), (6) lygybes interpretuojame taip:

1 teorema. *Jei $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$ yra pusiausvyrinė strategija, tai*

a) strategija $\bar{\beta}$ yra vektorių A_1, A_2, A_3 iškilojo darinio, kurio rezultatas yra vektorius su vienodomis komponentėmis, koeficientai;

b) vektorių aibės $\{A_1, A_2, A_3\}$ iškilasis apvalkas turi bendrų taškų su tiese $\{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 = x_3\}$.

Jei $\bar{\beta} > \mathbf{O}$ yra pusiausvyrinė strategija, tai

c) strategija $\bar{\alpha}$ yra vektorių $\{b_1, b_2, b_3\}$ iškilojo darinio, kurio rezultatas yra vektorius su vienodomis komponentėmis, koeficientai;

d) vektorių aibės $\{b_1, b_2, b_3\}$ iškilasis apvalkas turi bendrų taškų su tiese $\{(y_1, y_2, y_3) | y_1 = y_2 = y_3\}$.

Įrodymas elementarus – išplaukia iš vektorių iškilojo darinio apibrėžimo.

Tarkime, kad $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ yra Nešo pusiausvyra, kurioje $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$. Pasirinkime bet kurį iš vektorių A_j, $j = 1, 2, 3$, likusius vektorius iš sistemos A_1, A_2, A_3 pažymėkime A_l, A_k ir (5) lygybę pertvarkykime taip:

$$\bar{\beta}_j A_j + (1 - \bar{\beta}_j) \cdot \left(\frac{\bar{\beta}_l}{1 - \bar{\beta}_j} A_l + \frac{\bar{\beta}_k}{1 - \bar{\beta}_j} A_k \right) = (v, v, v). \tag{7}$$

Skliauste esantį vektorių A_l ir A_k iškiląjį darinį pažymėkime taip:

$$\bar{A}_j = \frac{\bar{\beta}_l}{1 - \bar{\beta}_j} A_l + \frac{\bar{\beta}_k}{1 - \bar{\beta}_j} A_k = \mu_j A_l + (1 - \mu_j) A_k. \tag{8}$$

Čia $\bar{\beta}_j \in (0, 1)$, $\mu_j \in (0, 1)$.

Lygybę (7) interpretuojame taip:

2 teorema. *Jei $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, tai, kokį bepasirinktume A_j, $j = 1, 2, 3$, iškilasis darinys $\bar{A}_j$ yra (vieninteléje egzistuojančioje) plokštumoje $H(A_j)$, einančioje per tašką A_j ir tiesę $x_1 = x_2 = x_3$.*

Įrodymas. Taško A_j koordinatės nėra lygios, tad A_j nepriklauso tiesei $x_1 = x_2 = x_3$ ir todėl egzistuoja vienintelė plokštuma (pavadinsime ją $H(A_j)$), einanti per A_j ir tiesę $x_1 = x_2 = x_3$. Taškas $\bar{A}_j$, lygus taškų (v, v, v) ir A_j (priklausančių $H(A_j)$) iškilajam dariniui, taip pat priklauso $H(A_j)$.

Teorema įrodyta.

Plokštumą $H(A_j)$ galima apibrėžti ir kaip einančią per taškus A_j, $(0, 0, 0)$ ir $(1, 1, 1)$. Jos lygtis yra

$$\begin{aligned} H(A_j) &= \{(x_1, x_2, x_3) | (a_{3j} - a_{2j}) x_1 + (a_{1j} - a_{3j}) x_2 + (a_{2j} - a_{1j}) x_3 = 0\} = \\ &= \{X | \langle \Delta A_j, X \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

3 teorema. *Jei $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, tai bet kuriam A_j, $j = 1, 2, 3$, teisingas vienas ir tik vienas iš tvirtinimų:*

arba

a) Skaliarinės sandaugos $\langle \Delta A_j, A_l \rangle$, $\langle \Delta A_j, A_k \rangle$ yra priešingų ženklų skaičiai, t.y. plokštuma $H(A_j)$ griežtai atskiria taškus A_l ir A_k,

arba

b) $\langle \Delta A_j, A_l \rangle = \langle \Delta A_j, A_k \rangle = 0$, t.y. abu taškai A_l ir A_k yra plokštumoje $H(A_j)$.

Įrodymas. Kadangi taškas $\bar{A}_j$ yra plokštumoje $H(A_j)$, tai

$$\begin{aligned} \langle \Delta A_j, \bar{A}_j \rangle &= \langle \Delta A_j, \mu_j A_l + (1-\mu_j) A_k \rangle = \\ &= \mu_j \langle \Delta A_j, A_l \rangle + (1-\mu_j) \langle \Delta A_j, A_k \rangle = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Kadangi $\mu_j > 0$ ir $1 - \mu_j > 0$, (9) lygybė gali būti teisinga tik kai dauginamieji $\langle \Delta A_j, A_l \rangle$, $\langle \Delta A_j, A_k \rangle$ arba yra priešingųjų ženklų skaičiai, arba abu lygūs nuliui.

Teorema įrodyta.

1 išvada. *Jeigu matricos A kuriam nors stulpeliui A_j, $j = 1,2,3$, sudarę cikliškų skirtumų vektorių ΔA_j ir apskaičiavę jo skaliarines sandaugas su likusiais stulpeliais gausime vienodo ženklo skaičius, tai bimatricinis lošimas A, B Nešo pusiausvyrų $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, neturi.*

Dabar tirsime 3 teoremos a) atvejį, panaudodami Nešo pusiausvyros $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$ egzistavimui būtinąją (7) lygybę. Palaipsniui nustatysime koeficientų μ_j ir $\bar{\beta}_j$ galimas reikšmes, atskirdami tuos atvejus, kai abu jie priklauso intervalui $(0,1)$.

Kadangi (7) lygybėje esantis vektorius $\bar{A}_j = \mu_j A_l + (1-\mu_j) A_k$ turi priklausyti plokštumai $H(A_j)$, tai

$\langle \Delta A_j, \mu_j A_l + (1-\mu_j) A_k \rangle = 0$, ir iš čia galime apskaičiuoti μ_j reikšmę:

$$\mu_j = \frac{\langle \Delta A_j, A_k \rangle}{\langle \Delta A_j, A_k \rangle - \langle \Delta A_j, A_l \rangle} = \frac{\langle \Delta A_j, A_k \rangle}{\langle \Delta A_j, A_k - A_l \rangle}, \tag{10}$$

kuri priklauso intervalui $(0,1)$, nes patenkinta 3 teoremos a) sąlyga.

Tuomet vienareikšmiškai nustatome vektorių $\bar{A}_j$:

$$\bar{A}_j = \mu_j A_l + (1-\mu_j) A_k = \frac{\langle \Delta A_j, A_k \rangle \cdot A_l - \langle \Delta A_j, A_l \rangle A_k}{\langle \Delta A_j, A_k - A_l \rangle}. \tag{11}$$

4 teorema. *Tarkime, kad kuriam nors iš A_j, $j = 1,2,3$, skaliarinės sandaugos $\langle \Delta A_j, A_l \rangle$, $\langle \Delta A_j, A_k \rangle$ yra priešingųjų ženklų skaičiai. Tuomet, jeigu yra patenkintos sąlygos:*

a) vektoriaus $\bar{A}_j$ – iš (11) formulės – komponentės nėra vienodos;

b) esant patenkintai a) sąlygai, vektorius $\bar{A}_j - A_j$ nėra vienodų komponenčių vektorius;

c) esant patenkintoms a) ir b) sąlygoms, skaičius $\bar{\beta}_j =$

$$= \frac{\langle \Delta A_j, A_k \rangle (a_{sl} - a_{tl}) - \langle \Delta A_j, A_l \rangle (a_{sk} - a_{tk})}{\langle \Delta A_j, A_k \rangle (a_{sl} - a_{tl}) - \langle \Delta A_j, A_l \rangle (a_{sk} - a_{tk}) - \langle \Delta A_j, A_k - A_l \rangle (a_{sj} - a_{tj})}, \tag{12}$$

kuris yra vienodas bet kokiems $s = 1, 2, 3$; $t = 1, 2, 3$; $s \neq t$, *priklauso intervalui* $(0, 1)$, *tai egzistuoja vienintelė strategija* $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, *tenkinanti (5) sąlygą, t.y. tinkanti būti pusiausvyrine strategija antram lošėjui Nešo pusiausvyroje* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$. *Priešingu atveju, t.y. jei tikrindami paeiliui a), b), c) sąlygas aptinkame neišpildytą sąlygą, lošimas* A, B *Nešo pusiausvyros* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, *neturi.*

Įrodymas. Jeigu vektoriaus $\bar{A}_j$ komponentės būtų vienodos, tai (7) lygybė būtų teisinga tik esant $\bar{\beta}_j = 0$, t.y. $\bar{\beta}$ nebūtų vektorius, kurio visos komponentės daugiau už 0.

Jeigu $\bar{A}_j - A_j$ būtų vienodų kompnenčių vektorius, tai, esant komponentėms lygioms nuliui, būtų $\bar{A}_j = A_j$, arba, kai $\bar{A}_j \neq A_j$, tiesė, einanti per taškus A_j ir $\bar{A}_j$ būtų lygiagreti tiesei $x_1 = x_2 = x_3$, ir tiesėje $\bar{\beta}_j A_j + (1 - \bar{\beta}_j)\bar{A}_j$ nebūtų taškų, kurių komponentės vienodos – Nešo pusiausvyra $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, neegzistuoja. Jei $\bar{A}_j = A_j$, tai (7) lygybėje bet kuriai $\bar{\beta}_j$ reikšmei esant, gauname $A_j = (v, v, v)$, o tai prieštarauja sąlygai, kad matrica A neturi stulpelio iš vienodų skaičių – Nešo pusiausvyra $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, neegzistuoja.

Jeigu a), b) sąlygos patenkintos, tai taškai $A_j, \bar{A}_j$ nesutampa, abu nepriklauso tiesei $x_1 = x_2 = x_3$, per juos einanti tiesė yra plokštumoje $H(A_j)$, kurioje yra ir tiesė $x_1 = x_2 = x_3$. Tiesės kertasi, sankirtos taškas yra vienintelis ir tenkina lygybę

$$\bar{\beta}_j A_j + (1 - \bar{\beta}_j)\bar{A}_j = (v, v, v).$$

Kairėje esantį vektorių išreiškę komponentėmis ir sulyginę jas, galėsime pasirinkti bet kurią iš trijų gautų lygčių ir, išreiškę $\bar{\beta}$, gausime (12) išraišką. Pusiausvyrinės strategijos $\bar{\beta} > \mathbf{O}$ egzistavimui būtina ir pakanka, kad gautasis skaičius $\bar{\beta}_j$ priklausytų intervalui (0,1).

Teorema įrodyta.

Pastabos:

1. *Skaičius* $\bar{\beta}_j$ (12) *lygybėje yra intervale (0,1) tada ir tik tada, kai skaičiai*

$$\langle \Delta A_j, A_k\rangle(a_{sl} - a_{tl}) - \langle \Delta A_j, A_l\rangle(a_{sk} - a_{tk}) \quad ir$$

$$\langle \Delta A_j, A_k - A_l\rangle(a_{sj} - a_{tj})$$

yra priešingų ženklų.

2. *Pusiausvyrinės strategijos egzistavimo atveju jos komponentes ir pirmojo lošėjo išloši pusiausvyroje galime surasti panaudodami teoremoje apskaičiuotus skaičius: komponentę* $\bar{\beta}_j$ *turime, o*

$$\bar{\beta}_l = (1 - \bar{\beta}_j) \cdot \mu_j, \quad \bar{\beta}_k = (1 - \bar{\beta}_j) \cdot (1 - \mu_j), \quad v = \langle \bar{\beta}, a_1\rangle = \langle \bar{\beta}, a_2\rangle = \langle \bar{\beta}, a_3\rangle.$$

3 teoremos b) atveju taškai A_j, A_l, A_k ir tiesė $x_1 = x_2 = x_3$ yra plokštumoje $H(A_j)$. Projektuosime $H(A_j)$ į vieną iš koordinatinių plokštumų, kuriai $H(A_j)$ nėra statmena. Kaip nustatyti? Jeigu $H(A_j)$ būtų statmena koordinatinei plokštumai, tarkime plokštumai x_2, x_3, tai $H(A_j)$ plokštuma projektuotųsi į tiesę $x_2 = x_3$, t.y. kiekvieno iš taškų A_j, A_l, A_k projekcijos turėtų vienodas koordinates. T.y. vektoriai – eilutės a_2 ir a_3 būtų vienodos. Trečioji eilutė turi būti skirtinga, nes matrica A neturi vienodų stulpelių. Tuomet projektavimui pasirinktume plokštumą x_1, x_2 arba x_1, x_3.

Koordinačių plokštumą, į kurią projektuosime $H(A_j)$, pažymėkime x_s, x_t.

5 teorema. *Jeigu bent vienos poros – iš taškų* A_j, A_l, A_k *– projekcijos yra skirtingose tiesės* $x_s = x_t$ *pusėse (t.y. vienos projekcijos viena komponentė didesnė, kitos projekcijos – kita), tai egzistuoja be galo daug vektorių* $\bar{\beta}$ *(tame tarpe ir* $\bar{\beta} > \mathbf{O}$*), tinkančių būti pusiausvyrine strategija Nešo pusiausvyroje* $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

Priešingu atveju, kai visų taškų A_j, A_l, A_k projekcijų ta pati komponentė yra didesnė, lošimas A, B Nešo pusiausvyrų $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > 0$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, neturi.

Įrodymas. Remsimės [3] rezultatais bimatriciniam (2×2) lošimui. [3] įrodyta, kad Nešo pusiausvyra, kurioje abu lošėjai savo grynąsias strategijas naudoja su teigiamom tikimybėm, egzistuoja tada ir tik tada, kai taškai yra skirtingose tiesės pusėse. T.y. mūsų lošimo atveju, kai visų taškų projekcijos yra vienoje pusplokštumėje, lošimas neturi Nešo pusiausvyrų.

Priešingu atveju vienas taškas projektuojamas vienoje pusplokštumėje, o kiti du – kitoje. Jų kiekvienas iškilas darinys gali būti tuo vienos pusplokštumės tašku dvimačiu atveju. Pusiasvyrinių strategijų be galo daug, nes dviejų projekcijų iškilųjų darinių yra be galo daug.

Pusė darbo atlikta. Liko kita pusė – remiantis (6) lygybe, 2 lema ir antrojo lošėjo išlošių matricos B savybėmis – įrodyti analogiškus pusiausvyrinės strategijos pirmam lošėjui egzistavimo faktus, rasti jos analizinę išraišką. Tvirtinimus pateiksime įrodymų nedetalizuodami. Teoremose naudosime žymėjimus

$$\lambda_i = \frac{\langle \Delta b_i, b_k \rangle}{\langle \Delta b_i, b_k \rangle - \langle \Delta b_i, b_l \rangle} = \frac{\langle \Delta b_i, b_k \rangle}{\langle \Delta b_i, b_k - b_l \rangle}, \tag{13}$$

$$\bar{b}_i = \lambda_i b_l + (1 - \lambda_i) b_k = \frac{\langle \Delta b_i, b_k \rangle \cdot b_l - \langle \Delta b_i, b_l \rangle \cdot b_k}{\langle \Delta b_i, b_k - b_l \rangle}. \tag{14}$$

6 teorema. *Jei $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, tai, kokį bepasirinktume b_i, $i = 1, 2, 3$, taškų b_l ir b_k iškilasis darinys $\bar{b}_i$ yra (vieninteléje egzistuojančioje) plokštumoje $H(b_i)$, einančioje per tašką b_i ir tiesę $y_1 = y_2 = y_3$.*

7 teorema *Jei $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, tai bet kuriam b_i, $i = 1, 2, 3$, yra teisingas vienas ir tik vienas iš tvirtinimų:*

arba

a) Skaliarinės sandaugos $\langle \Delta b_i, b_l \rangle$, $\langle \Delta b_i, b_k \rangle$ yra priešingų ženklų skaičiai, t.y. plokštuma $H(b_i)$ griežtai atskiria taškus b_l ir b_k,

arba

b) $\langle \Delta b_i, b_l \rangle = \langle \Delta b_i, b_k \rangle = 0$, t.y. abu taškai b_l ir b_k yra plokštumoje $H(b_i)$.

2 išvada. *Jeigu matricos B kuriai nors eilutei b_i, $i = 1, 2, 3$, sudarę cikliškų skirtumų vektorių Δb_i ir apskaičiavę jo skaliarines sandaugas su likusiomis eilutėmis gauname vienodo ženklo skaičius, tai bimatricinis lošimas A, B Nešo pusiausvyrų $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, neturi.*

8 teorema. *Tarkime, kad kuriam nors iš b_i, $i = 1, 2, 3$, skaliarinės sandaugos $\langle \Delta b_i, b_l \rangle$, $\langle \Delta b_i, b_k \rangle$ yra priešingųjų ženklų skaičiai. Tuomet, jeigu yra patenkintos sąlygos:*

a) vektoriaus $\bar{b}_i$ – iš (14) formulės – komponentės nėra vienodos,

b) esant patenkintai a) sąlygai, vektorius $\bar{b}_i - b_i$ nėra vienodų komponenčių vektorius,

c) esant patenkintoms a) ir b) sąlygoms, skaičius $\bar{\alpha}_i =$

$$= \frac{\langle \Delta b_i, b_k \rangle (b_{ls} - b_{lt}) - \langle \Delta b_i, b_l \rangle (b_{ks} - b_{kt})}{\langle \Delta b_i, b_k \rangle (b_{ls} - b_{lt}) - \langle \Delta b_i, b_l \rangle (b_{ks} - b_{kt}) - \langle \Delta b_i, b_k - b_l \rangle (b_{is} - b_{it})}, \tag{15}$$

kuris yra vienodas bet kokiems $s = 1,2,3$*;* $t = 1,2,3$*;* $s \neq t$*, priklauso intervalui* $(0,1)$*, tai egzistuoja vienintelė strategija* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$*, tenkinanti (6) sąlygą, t.y. tinkanti būti pusiausvyrine strategija pirmam lošėjui Nešo pusiausvyroje* $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*,* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$*,* $\bar{\beta} > \mathbf{O}$*.*

Priešingu atveju, t.y. jei, tikrindami paeiliui sąlygas a), b), c), aptinkame neišpildytą sąlygą, lošimas A, B *Nešo pusiausvyros* $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*,* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$*,* $\bar{\beta} > \mathbf{O}$*, neturi.*

Pusiausvyrinės strategijos $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$ egzistavimo atveju jos komponentės ir antrojo lošėjo išloši pusiausvyroje galima surasti panaudojant teoremose apskaičiuotus skaičius – kaip ir $\bar{\beta}$ atveju:

$$\bar{\alpha}_l = (1-\bar{\alpha}_i)\lambda_i, \quad \bar{\alpha}_k = (1-\bar{\alpha}_i)(1-\lambda_i), \quad w = \langle \bar{\alpha}, b_1 \rangle = \langle \bar{\alpha}, b_2 \rangle = \langle \bar{\alpha}, b_3 \rangle .$$

9 teorema. *Jei bent vienos poros – iš* b_i*,* b_l*,* b_k *– projekcijos yra skirtingose tiesės* $y_s = y_t$ *pusėse (t.y. vienos projekcijos viena komponentė didesnė, kitos projekcijos – kita), tai egzistuoja be galo daug vektorių* $\bar{\alpha}$ *(tame tarpe ir* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$*), tinkančių būti pusiausvyrine strategija Nešo pusiausvyroje* $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*.*

Priešingu atveju, kai visų taškų b_i*,* b_l*,* b_k *projekcijų ta pati koordinatė yra didesnė, lošimas* A, B *Nešo pusiausvyrų* $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*,* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$*,* $\bar{\beta} > \mathbf{O}$*, neturi.*

Pagrindinis mūsų tyrinėjimų rezultatas toks:

3 išvada. *Bimatriciniame lošime* A, B*, kuriame:*

matrica A *neturi stulpelių, o matrica* B *– eilučių, sudarytų iš vienodų skaičių,*

matricoje A *nėra vienodų stulpelių, o matricoje* B *– vienodų eilučių,*

vienintelė Nešo pusiausvyra $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$*,* $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$*,* $\bar{\beta} > \mathbf{O}$ *egzistuoja tada ir tik tada, kai patenkintos 4 ir 8 teoremų sąlygos.*

Įrodymas. Būtinumas įrodytas 4 ir 8 teoremose. Pakankamumas išplaukia iš to, kad patenkintos (5) ir (6) sąlygos 2 lemoje.

Abiejų teoremų įrodymai yra konstruktyvūs, tad turime ir algoritmus bimatricinio lošimo Nešo pusiausvyrai apskaičiuoti.

Šiame darbe įrodyti tvirtinimai, aišku, yra tarpusavyje susiję. Tuos sąryšius ir kitus neišnagrinėtus atvejus, tikėkimės, turėsime progos aptarti kitoje vietoje.

Literatūra

[1] С. Карлин, *Математические методы в теории игр, програмировании и экономике*, Москва, 838 с. (1964).

[2] Д. Суджюте, Необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в играх на единичном квадрате, *Лит. Матем. Сб.*, 178–185 (1983).

[3] D. Sūdžiūtė, Nešo pusiausvyrų konvergavimas viename laiko momento parinkimo lošime, *Lietuvos Matematikų Draugijos XLI konferencijos Darbų Rinkinys*, Šiauliai (2000).

Nash equilibria in the context of convex sets

D. Sūdžiūtė

Nash equilibria $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$, $\bar{\alpha} > \mathbf{O}$, $\bar{\beta} > \mathbf{O}$, are investigatėd in bimatrix (3×3) game. Necessary and sufficient conditions for existing of such Nash equilibria are obtained (in theorems 4 and 8), and the algorithms for calculating them too. Some ideas of convex analysis are employed.