Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 81–84

Oilerio sandaugų analizinio pratęsimo klausimu

Eugenijus STANKUS (VU)
el. paštas: eugenijus.stankus@maf.vu.lt

Analiziniai metodai skaičių teorijoje taikomi plačiai ir daugeliu atvejų leidžia gauti tikslesnius rezultatus negu elementarieji. Jie sėkmingai naudojami ir apibendrintųjų (Beurling'o) skaičių [1] teorijoje.Tačiau tyrinėjant apibendrintųjų skaičių savybes, analizinių metodų taikymo galimybes riboja generuojančių Dirchlė eilučių analizinio pratęsimo problemos. Šiame darbe nagrinėjama viena apibendrintųjų skaičių klasė, kai generuojančią Dirichlė eilutę galima išreikšti Rymano dzeta funkcija.

Apibendrintaisiais pirminiais skaičiais vadinama realiųjų skaičių seka

$$P = \{1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots\}, \tag{1}$$

kai $p_k \longrightarrow \infty$. Multiplikacinės pusgrupės N, generuotos sekos P nariais, elementai vadinami apibendrintaisiais sveikaisiais skaičiais:

$$N = \{1 = n_1 < n_2 \leqslant n_3 \leqslant \ldots\}. \tag{2}$$

Atkreipkime dėmesį, kad apibendrintojo skaičiaus išdėstymas apibendrintųjų pirminių sandauga nebūtinai vienareikšmiškas.

Analizinių metodų taikymas tiriant apibendrintųjų skaičių sekas (1) ir (2) susijęs su generuojančios funkcijos

$$\zeta_P(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - p_k^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n_j^{-s},$$

$s = \sigma + it$ (su tam tikra konvergavimo abscise a), analizinių savybių tyrimu. Pavyzdžiui, darbe [2] nagrinėta apibendrintųjų pirminių seka $\{u_p p\}$, kai p perbėga racionaliuosius pirminius skaičius, o $u_p = v > \frac{1}{2}$. Generuojanti funkcija

$$\zeta_P(s) = \prod_{p}(1 - (vp)^{-s})^{-1}, \quad s = \sigma + it,$$

analiziškai pratęsiama į kairę nuo tiesės $\sigma = 1$, tačiau tik į pusplokštumės $\sigma > 0$ sritį, gautą išpjovus tam tikras atkarpas pagal Rymano dzeta funkcijos nulius. Tai leidžia įrodyti apibendrintųjų sveikųjų, neviršijančių x, skaičiaus asimptotinę formulę. Vėliau šiuo požiūriu buvo nagrinėti ir sudėtingesni apibendrintųjų pirminių sekos atvejai, pavyzdžiui, $\{v(p + r)\}$, kai $v > \frac{1}{2}$, $r \in R$ [3].

Tarkime,

$$u_p = v(1 + kp^{\alpha-1}),$$

$0 \leqslant k \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha < 1$. Kitaip tariant, nagrinėkime apibendrintųjų pirminių skaičių seką $\{u_p p\} = \{v(p + kp^{\alpha})\}$, kai $v > \frac{1}{2},\ 0 \leqslant k \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha < 1$.

Pažymėkime

$$\zeta(s; k, \alpha) = \prod_p (1 - (p + kp^{\alpha})^{-s})^{-1}.$$

Kai $\sigma > 1$, ši Oilerio sandauga konverguoja. Nesunku įrodyti, jog *ši sandauga konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \alpha$ išskyrus tašką $s = 1$, kuriame funkcija $\zeta(s; k, \alpha)$ turi pirmos eilės polių su rezidiumu*

$$r(k, \alpha) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p + kp^{\alpha} - 1}\right).$$

Šis faktas išplaukia iš lygybių

$$\zeta(s; k, \alpha) = \zeta(s) \cdot H(s; k, \alpha),$$
$$H(s; k, \alpha) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)\left(1 - (p + kp^{\alpha})^{-s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \omega_p(s; k, \alpha)\right),$$
$$\omega_p(s; k, \alpha) = \frac{(p + kp^{\alpha})^{-s} - p^{-s}}{1 - (p + kp^{\alpha})^{-s}}$$

ir įverčio

$$\left|(p + kp^{\alpha})^{-s} - p^{-s}\right| = \left|s \int_p^{p+kp^{\alpha}} u^{-s-1}\, \mathrm{d}u\right| = \mathrm{O}\left(\frac{|s|}{p^{\sigma+1-\alpha}}\right);$$

čia $\zeta(s)$ – Rymano dzeta funkcija.

Nagrinėkime Oilerio sandaugą

$$Z(s; v, k, \alpha) = \prod_p (1 - (v(p + kp^{\alpha}))^{-s})^{-1}. \tag{3}$$

Šios sandaugos analiziniam pratęsimui į kairę nuo tiesės $\sigma = 1$ remsimės tokia lema [2]:

Tegu ω ir z – kompleksiniai skaičiai, tenkinantys nelygybes $|z| < 1$ ir $|\omega z| < 1$. Tuomet yra tokie kompleksiniai skaičiai $h(n, \omega)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$h(n, w) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d,2)=1}} \mu(d) w^{n/d},$$

su kuriais galioja lygybė

$$(1 - wz)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + z^n}{1 - z^n} \right)^{h(n,w)};$$

čia $\mu(d)$ – Miobiuso funkcija.

Pritaikę šią lemą sandaugos (3) dauginamiesiems, gausime:

$$\left(1 - \left(v\,(p + kp^{\alpha})\right)^{-s}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + (p + kp^{\alpha})^{-ns}}{1 - (p + kp^{\alpha})^{-ns}} \right)^{h\left(n, v^{-s}\right)}.$$

Tuomet funkciją $Z(s; v, k, \alpha)$ galima užrašyti šitaip:

$$Z(s; v, k, \alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta^2(ns; k, \alpha)}{\zeta(2ns; k, \alpha)} \right)^{h(n, v^{-s})} = \left(\zeta(s; k, \alpha)\right)^{v^{-s}} G(s; v, k, \alpha); \tag{4}$$

čia

$$G(s; v, k, \alpha) = \left(\zeta(2s; k, \alpha)\right)^{-v^{-s}/2} \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\zeta^2(ns; k, \alpha)}{\zeta(2ns; k, \alpha)} \right)^{h\left(n, v^{-s}\right)}. \tag{5}$$

Funkcija $\zeta(s; k, \alpha)$ turi tuos pačius nulius kaip ir Rymano dzeta funkcija, o taškas $s = 1$ yra paprastas polius. Todėl funkcija $Z(s; v, k, \alpha)$ analiziškai pratęsiama į pusplokštumės $\sigma > \alpha$ sritį, kurioje nėra ypatingųjų taškų. Kaip matome iš (4) ir (5) lygybių, tokie taškai yra $s = 1$ bei funkcijų $\zeta(2s)$, $\zeta(3s), \ldots$ nuliai.

Teorema. *Funkcija $Z(s; v, k, \alpha)$ yra analiziškai pratęsiama į kompleksinės plokštumos sritį*

$$\mathcal{D} = \{s : \sigma > \alpha\} \setminus \left(\bigcup_{\varrho} \bigcup_{n} \left\{ s = \frac{x\beta + i\gamma}{n} : \alpha < x \leqslant 1 \right\} \cup (\alpha; 1] \right);$$

čia $\varrho = \beta + i\gamma$ pažymėti Rymano dzeta funkcijos nuliai.

Įrodžius sandaugos (5) tolygų konvergavimą, kiekvienoje srities $\mathcal{D}$ kompaktiškoje aibėje, gaunamas funkcijos $G(s; v, k, \alpha)$ analiziškumas srityje $\mathcal{D}$, taigi ir teoremos tvirtinimas.

Galimas šių rezultatų pritaikymas – apibendrintųjų sveikųjų, generuotų sekomis $\{p + kp^{\alpha}\}$ bei $\{v(p + kp^{\alpha})\}$, skaičiaus asimptotikos tyrimas.

Literatūra

[1] A. Beurling, Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés I, *Acta Math.*, **68**, 225–291 (1937).

[2] C. Ryavec, The analytic continuation of Euler products with applications to asymptotic formulae, *Illinois J. Math.*, **17**, 608–618 (1973).

[3] E. Stankus, Modified zeta functions and the number of g-integers, In: A. Laurinčikas *et al.* (Eds), *New Trends in Prob. and Stat.*, **4**, VSP/TEV, pp. 247–258 (1997).

On the analytic continuation of Euler products

E. Stankus

The sequence of generalized primes $\{v(p+kp^{\alpha})\}$ with rational prime numbers p and $v > \frac{1}{2}$, $0 \leqslant k \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$ is considered. The analicity of corresponding Euler product

$$Z(s; v, k, \alpha) = \prod_{p} (1 - (v(p + kp^{\alpha}))^{-s})^{-1}$$

in the domain

$$\{s : \sigma > \alpha\} \setminus \left(\bigcup_{\varrho} \bigcup_{n} \left\{ s = \frac{x\beta + i\gamma}{n} : \alpha < x \leqslant 1 \right\} \cup (\alpha; 1] \right),$$

where $\varrho = \beta + i\gamma$ are the zeros of Riemann zeta function, is proved.