Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 132–135

Dalinių išvestinių sistemos su nilpotenčiąja pagrindine matrica supaprastinimas

Donatas JURGAITIS, Arvydas-Juozapas JANAVIČIUS (ŠU)
el. paštas: pletra@cr.su.lt

Nagrinėkime matricinę dalinių išvestinių lygčių sistemą

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)+A(x,y,z)u=0, \tag{1}$$

čia $u(x,y,z)$ - ieškomoji funkcija, x, y, z - nepriklausomi kompleksiniai kintamieji, E - vienetinė, I_1 ir I_2 - pastovios ketvirtos eilės kvadratinės matricos, p - natūralusis skaičius. Matricai $A(x,y,z)$ galioja dėstinys

$$A(x,y,z)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(y,z)x^k. \tag{2}$$

Į (2) įeinanti laipsninė eilutė konverguoja hiperplokštumos $x=0$ aplinkoje. Šios hiperplokštumos taškuose stipriai išsigimsta (1) sistemos eilė. Ieškosime (1) sistemos sprendinių, kada matricos A_0 visos tikrinės reikšmės vienodos. Nesiaurindami bendrumo galime laikyti, kad vienintelė A_0 tikrinė reikšmė yra 0, o jos kartotinumas 4. Iš tikrųjų, jeigu vienintelė matricos A_0 tikrinė reikšmė yra α, tai keitinys

$$u(x,y,z)=\exp\left\{\alpha\frac{x^{-p}}{-p}\right\}Ev(x,y,z) \tag{3}$$

suveda (1) sistemą į sistemą

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+I_1\frac{\partial v}{\partial y}+I_2\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(A(x,y,z)-\alpha E\right)v=0. \tag{4}$$

Matricos $A(x,y,z)-\alpha E$ pagrindinis narys yra nilpotenčioji matrica $A_0-\alpha E$, t.y. vienintelė jos tikrinė reikšmė yra 4-ojo kartotinumo nulis. Nenusižengsime bendrumui, jeigu sakysime, kad A_0 yra Žordano matrica. Šito pasiektume tiesiniu neišsigimusiu keitiniu su pastoviais koeficientais.

Jeigu visi matricos A_0 Žordano langai yra pirmos eilės, tai A_0 būtų nulinė matrica ir, padaliję (1) iš x, gautume sistemą, kurios išsigimimo eilė vienetu mažesnė ir pagrindinis matricos $A(x,y,z)$ narys yra matrica $A_1(y,z)$. Šio atvejo šiame darbe nenagrinėkime, o toliau laikykime, kad bent vienas A_0 Žordano langas yra aukštesnės negu pirma eilės. Vadinasi, A_0 galima laikyti tiesiogine poslinkio matricų suma

$$A_0 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s, \quad s \leqslant 3, \tag{5}$$

kurioje bent vienos iš H_k eilė aukštesnė už 1.

Darbe [1] rastas keitinys

$$u(x,y,z) = T(x,y,z)v(x,y,z), \quad |T| \neq 0,$$

kuris (1) suveda į sistemas

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial T}{\partial x} + I_1\frac{\partial T}{\partial y} + I_2\frac{\partial T}{\partial z}\right) + AT - TB = 0, \tag{6}$$

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + Y_1(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial y} + Y_2(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + Bv = 0, \tag{7}$$

čia $B(x,y,z) = A_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k(y,z)x^k, \quad T(x,y,z) = E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(y,z)x^k,$
$Y_1 = T^{-1}I_1T, Y_2 = T^{-1}I_2T,$

$$A_0T_k - T_kA_0 - B_k + L_k = 0, \quad k > 0, \tag{8}$$

į L_k išraišką įeina $A_l, T_l, B_l, \quad l = 0,1,\dots,k-1$, be to matrica $B(x,y,z)$ yra blokinė diagonalioji matrica.

Matricų $B(x,y,z)$ ir $T(x,y,z)$ išraiškos laipsninėmis eilutėmis formaliai tenkina (6) sistemą, bet apskritai šios eilutės diverguoja $x = 0$ aplinkoje. Pagal [2] teoremą 9.3 šios eilutės yra funkcijų $B(x,y,z)$ ir $T(x,y,z)$ asimptotiniai dėstiniai pakankamai mažiems x.

Bet kurią (8) lygtį suskaldykime į blokinę lygtį taip, kad tų blokų eilės atitiktų (5) matricos A_0 suskaldymo į blokus eiles. Matricos T_k suskaldymo, atitinkančio A_0 suskaldymą, blokus pažymėkime T_k^{mn}, matricos B_k blokus pažymėkime B_k^{mn}, o L_k^{mn} pažymėkime matricos L_k blokus, čia $m,n = 1,2,\dots,s$. Tada bet kuri (8) lygtis ekvivalenti s^2 tokių lygčių:

$$H_mT_k^{mn} - T_k^{mn}H_n - B_k^{mn} + L_k^{mn} = 0, \quad m,n = 1,2,\dots,s, \quad k > 0. \tag{9}$$

(9) lygtys išsprendžiamos, jeigu matricos B_k^{mn} tenkina tam tikras sąlygas. Šios sąlygos nurodytos monografijos [2] lemoje 19.1. Pritaikę pastarąją gauname, kad visas B_k^{mn} eilutes, išskyrus paskutinę, galima apibrėžti laisvai. Paprastumo dėlei parinkime jas taip,

kad visi jų elementai būtų 0. Nuosekliai išsprendę visas (9) lygtis, nustatome matricas $T_k(y,z)$ ir $B_k(y,z)$ ir matricų $B_k(y,z)$, $k > 0$, nelygūs nuliui elementai bus tik tose eilutėse, kurios atitiks matricų H_k, $k = 1, 2, \dots, s$ paskutines eilutes.

Egzistuoja (7) sistemos asimptotinis sprendinys apskritai diverguojančia išsigimimo taškų aplinkoje laipsnine eilute. Šio sprendinio struktūra bus analogiška gerai žinomai iš analizinės stipriai išsigimstančių paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos tokių sprendinių struktūrai.

Sandauga $T(x,y,z)v(x,y,z)$ bus (1) sistemos sprendinio asimptotinis dėstinys pakankamai mažiems x.

Gautą rezultatą suformuluokime kaip teoremą.

Teorema. *Keitinys* $u(x,y,z) = T(x,y,z)v(x,y,z)$, $|T| \neq 0$, *perveda sistemą*

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u}{\partial x} + I_1\frac{\partial u}{\partial y} + I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right) + A(x,y,z)u = 0 \tag{10}$$

su nilpotenčiąja pagrindine $A(0,y,z)$ *matrica į sistemą*

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + Y_1(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial y} + Y_2(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + B(x,y,z)v = 0, \tag{11}$$

kurioje $B(x,y,z) = B_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k(y,z)x^k$, $B_0 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s$, H_k *- poslinkio matricos, ir nenuliniai* B_k, $k > 0$, *elementai yra tik tose eilutėse, kurios atitinka paskutinias blokų* H_k, $k = 1, 2, \dots, s$, *eilutes.*

Baigiamosios pastabos

1. Darbe nagrinėta keturių pirmos eilės dalinių išvestinių lygčių sistema. Prilyginę nuliui (1) sistemos pagrindinę dalį (skliausteliuose esantis reiškinys lygus nuliui) ir įrašę konkrečias matricų I_1 ir I_2 išraiškas, gautume Koši-Rymano sistemos trimatėje euklidinėje erdvėje analogą, Moisilo-Teodoresko sistemą [3].
2. Čia išdėstytą metodą galima sėkmingai taikyti bet kurio matavimo pirmos eilės dalinių išvestinių lygčių sistemai.

Literatūra

[1] D. Jurgaitis, Analizinis dalinių išvestinių sistemos supaprastinimas, *LMD mokslo darbai*, II tomas, Technika, 117–122 (1998).

[2] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва, Мир (1968).
[3] Gr.C. Moisil, N. Theodoresco, Fonctions holomorphes dans l'espace, *Mathematica*, **5**, 142–153 (1931).

Reduction of system of partial derivatives with nilpotent matrix

D. Jurgaitis, A.-J. Janavičius

In this paper we explain the method of squaring of the partial derivatives system with nilpotent matrix into the system with simpler matrix next to the solving function. Asymptotical solutions of this new system can be found using the method of gradual rows.