Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 136–139

Об одновременном взрыве одной системы уравнений Шредингера

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail: gintaras.puriuskis @maf.vu.lt

Рассматривается система нелинейных уравнений Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i\frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^{\alpha}u,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\Delta v + i\frac{\alpha}{2}|u|^{p}|v|^{\alpha-2}v, \quad t > 0.$$

Получены условия, при которых происходит колапс.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Шредингера

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i\frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^{\alpha}u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = i\Delta v + i\frac{\alpha}{2}|u|^{p}|v|^{\alpha-2}v, \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \ v(0,x) = v_0(x). \tag{2}$$

Здесь $u(t,x)$ и $v(t,x)$ - неизвестные функции, достаточно быстро стремящиеся к нулю вместе со своими производными при $|x| \to \infty$, $x \in R^n$, Δ – оператор Лапласа.

Рассматривается вопрос о взрыве (колапсе) решения задачи (1), (2). Доказано, если $p + \alpha \geq 2 + 4/n$, то при некоторых начальных данных существует сингулярное решение, т. е. существует $T < \infty$ такое, что

$$\lim_{t\to T} \|u\|_{H_1} = \infty, \ \lim_{t\to T} \|v\|_{H_1} = \infty, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to T} \|u\|_{L_\infty} = \infty, \ \lim_{t\to T} \|v\|_{L_\infty} = \infty. \tag{4}$$

Отметим, что u и v взрывается в тот же самый момент времени T. Систему (1) обобщает система

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} = ia_k\Delta w_k + f_k(w, w^*),$$

рассмотренная в работе [1]. Здесь $w = (w_1, ..., w_m)$ – неизвестная вектор функция, a_k, $k = 1, ..., m$ отличные от нуля действительные постоянные, w^* - комплексно сопряженная функция к функции w, f_k - функция $2m$ переменных.

f_k удовлетворяют следующим условиям

1)

$$\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{m} f_k w_k^*) = 0,$$

2)

$$\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{m} a_k f_k \nabla_{t,x} w_k^*) = \nabla_{t,x}\phi(w, w^*),$$

здесь $\nabla_{t,x} = (\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$, $\phi(w, w^*)$ - действительная функция $2m$ переменных такая, что

$$a_k f_k = i\frac{\partial\phi}{\partial w_k^*},\ a_k f_k^* = -i\frac{\partial\phi}{\partial w_k},\ k = 1, ..., m,$$

3) функция ϕ является однородной степени s, т.е.

$$\phi(\lambda w, \lambda w^*) = \lambda^s \phi(w, w^*).$$

ϕ дважды непрерывно дифференцируема функция. В статье [1] доказаны следующие равенства

$$\|w(t,x)\|_{L_2} = \|w(0,x)\|_{L_2}, \tag{5}$$

$$I_2(t) \equiv \int_{R^n} (\sum_{k=1}^{m} a_k^2 |\nabla w_k|^2 - \phi(w, w^*))\mathrm{d}x = I_2(0), \tag{6}$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = 2n(s-2)I_2 + 2(4 - n(s-2))\sum_{k=1}^{m}\int_{R^n} a_k^2 |\nabla w_k|^2 \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Здесь

$$F(t) \equiv \int_{R^n} (\sum_{k=1}^{m} |x|^2 |w_k|^2)\mathrm{d}x.$$

Для системы (1) имеем $\phi = |u|^p |v|^\alpha$, равенства (5), (6), (7) можно переписать

$$\|u(t,x)\|_{L_2} + \|v(t,x)\|_{L_2} = \|u(0,x)\|_{L_2} + \|v(0,x)\|_{L_2}, \tag{8}$$

$$I_2(t) \equiv \int\limits_{R^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - |u|^p|v|^\alpha)\mathrm{d}x = I_2(0),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2} = 2n(p+\alpha-2)I_2 + 2(4 - n(p+\alpha-2)) \int\limits_{R^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\mathrm{d}x,$$

$$F(t) \equiv \int\limits_{R^n} |x|^2(|u|^2 + |v|^2)\mathrm{d}x.$$

Вместо равенства (8) докажем более сильное равенство

Лемма. *Для решения задачи* (1), (2) *справедливы следующие равенства*

$$\|u(t,x)\|_{L_2} = \|u(0,x)\|_{L_2}, \quad \|v(t,x)\|_{L_2} = \|v(0,x)\|_{L_2}.$$

Доказательство. Обозначим $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$. Тогда первое уравнение системы (1) можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\Delta u_2 - \frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^\alpha u_2,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_1 + \frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^\alpha u_1.$$

Первое уравнение умножим на u_1, второе – на u_2, сложим и проинтегрируем по R^n. После интегрирования по частям получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u(t,x)\|_{L_2} = 0.$$

Отсюда получаем $\|u(t,x)\|_{L_2} = \|u(0,x)\|_{L_2}$. Аналогично доказывается другое равенство. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть u и v нетривиальное решение задачи (1), (2),* $p+\alpha \geq 2 + 4/n$, $p > 1$, $\alpha > 1$, $I_2 < 0$, *тогда существует такое* $0 < T < \infty$, *что справедливы равенства* (3), (4).

Замечание. Из результатов статьи [1] следует

$$\lim_{t\to T}(\|u\|_{H_1} + \|v\|_{H_1}) = \infty, \quad \lim_{t\to T}(\|u\|_{L_\infty} + \|v\|_{L_\infty}) = \infty.$$

Теорема настоящей статьи усиливает результат статьи [1].

Доказательство теоремы. В статье [1] доказано

$$\lim_{t\to T} \int\limits_{R^n} |x|^2(|u|^2 + |v|^2)\mathrm{d}x = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{t\to T}\int\limits_{R^n}|x|^2|u|^2\mathrm{d}x=0.$$

Аналогичное равенство и аналогичное доказательство есть для функции v. Для любого $\varepsilon>0$ верно неравенство

$$\int\limits_{R^n}|x|^2|u|^2\mathrm{d}x\ge\int\limits_{|x|\le\varepsilon}|x|^2|u|^2\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int\limits_{|x|>\varepsilon}|u|^2\mathrm{d}x.$$

Отсюда для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$\lim_{t\to T}\int\limits_{|x|>\varepsilon}|u|^2\mathrm{d}x=0.$$

По условию теоремы u есть нетривиальное решение, т.е. $\|u\|>0$. По лемме имеем

$$\lim_{t\to T}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}|u|^2\mathrm{d}x=\int\limits_{R^n}|u|^2\mathrm{d}x=\|u_0\|_{L_2}>0.$$

Последнее равенство верно для любого $\varepsilon>0$, из теоремы о среднем значении интеграла получим, что $|u|\to\infty$ при $t\to T$. Равенство (4) доказано. Пользуясь леммой и неравенством (см. [1])

$$\int\limits_{R^n}|u|^2\mathrm{d}x\le\frac{2}{n}\Bigl(\int\limits_{R^n}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_{R^n}|x|^2|u|^2\mathrm{d}x\Bigr)^{1/2}$$

получаем равенство (3). Теорема доказана.

Литература

[1] А. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Лит. Мат. Сб.*, **35**(2), 181–189 (1995).

Apie vienos Šredingerio lygčių sistemos vienalaikį sprogimą

G. Puriuškis

Nagrinėjama netiesinių Šredingerio lygčių sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\Delta u+i\frac{p}{2}|u|^{p-2}|v|^{\alpha}u$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=i\Delta v+i\frac{\alpha}{2}|u|^{p}|v|^{\alpha-2}v,\ \ t>0.$$

Gautos sąlygos, kada sprendinys sprogsta.