Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 313–319

Konkurencinio dviejų asmenų lošimo su tiesine pelno funkcija sprendimas

Jolanta DRANSEIKIENĖ, Daina SŪDŽIŪTĖ (VU)
el. paštas: jolanta@media-house.com

Dviejų asmenų nulinės sumos lošimas su pelno funkcija $kx+1$, kai $k \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, – yra išspręstas šiame darbe (jo sprendimas, kai $k=0$ yra literatūroje [1]).

Išreikštine forma pateikiamos optimaliosios lošėjų strategijos X^*, Y^*, lošimo vertė v. Jų parametrai a, α, C_0, C_1 yra neišreikštinių lygčių sistemos sprendiniai.

Parametrų a, α, C_0, C_1 skaitinės vertės įvairioms k reikšmėms suskaičiuotos Microsoft Excel programa, a reikšmės radimui panaudojant „Goal Seek“ funkciją. Atitinkamos parametrų reikšmės ir jų priklausomybė nuo k pateikti prieduose.

Tarkime, kad firma A gamina prekę, kuri yra paklausi laiko intervale [0,1]. Kita firma, B, didelio koncerno D dukterinė įmonė, gamina analogišką prekę. Abi šios firmos savo prekes parduoda toje pačioje rinkoje, tačiau siekia skirtingų tikslų: firma A siekia gauti maksimalų pelną, o firmos B tikslas yra sužlugdyti įmonę A, t.y. minimizuoti jos pelną ir perimti visą rinką. Siekdama šio tikslo, antroji įmonė visiškai neatsižvelgia į galimus savo finansinius nuostolius, kadangi perėmus visą rinką, juos bus galima padengti ateityje. Firma B savo tikslą pasiekti gali tik vieninteliu teisėtu būdu – pasirinkdama tinkamą momentą savo produkcijos pateikimui į rinką.

Tarkime, kad konkuruojančių prekių kokybė priklauso nuo jų pateikimo į rinką momento: kuo vėliau prekė pateikiama, tuo aukštesnė jos kokybė, o realizuojama tik kokybiškesnė prekė.

Šis konfliktas yra modeliuojamas nulinės sumos lošimu vienetiniame kvadrate. Tariame, kad firma A yra I lošėjas, o firma B – II lošėjas. Taigi I lošėjo išlošio funkcija bus apibrėžiama taip:

$$H = \begin{cases} (kx+1)(y-x), & x<y, \\ \frac{1}{2}(kx+1)(1-x), & x=y, \\ (kx+1)(1-x), & x>y, \end{cases} \tag{1}$$

kai $k \in (-1,\infty)$, $x, y \in [0,1]$.

Ieškosime šio lošimo sprendimo: lošimo vertės bei abiejų lošėjų optimalių strategijų. Taip pat stebėsime, kaip kinta lošimo sprendinio parametrai priklausomai nuo koeficiento k. Atvejis, kai $k=0$, yra išnagrinėtas knygoje [1]. Rastas šio lošimo sprendinys: I ir II lošėjų optimalios mišriosios strategijos, kurių spektras yra intervalas $[0,a]$, bei lošimo vertė. Šiame darbe ieškosime analogiško pavidalo sprendinio, kai $k \in (-1,0) \cup (0,\infty)$.

Tarkime, kad II lošėjo optimali strategija Y^* apibrėžiama tikimybiniu pasiskirstymu su tankio funkcija g_a, kuri yra nelygi nuliui tik intervale $[0, a]$, $a < 1$, ir į šios strategijos spektrą įeina visi intervalo $[0, a]$ taškai, o I lošėjo optimali strategija X^* - tikimybiniu pasiskirstymu su tankio funkcija f_a, kuri tašką 0 naudoja su teigiama tikimybe (taške 0 daro šuolį, lygų α) ir yra lygi nuliui už intervalo $[0, a]$, $a < 1$, ribų, ir į šios strategijos spektrą įeina visi intervalo $[0, a]$ taškai. Taip apibrėžtos abiejų lošėjų optimalios strategijos tenkintų tapatybes:

$$H(X^*, y) = \alpha y + \int_0^y (kx+1)(y-x)f_a(x)\,dx + \int_y^a (kx+1)(1-x)f_a(x)\,dx = v, \quad \text{(pažymime)} \quad \forall y \in [0, a],$$

$$H(x, Y^*) = \int_0^x (kx+1)(1-x)g_a(y)\,dy + \int_x^a (kx+1)(y-x)g_a(y)\,dy = v, \quad \text{(pagal pažymėjimą)} \ \forall x \in [0, a],$$

kadangi $H(x, Y^*)$ yra tolydi pagal x, o $H(X^*, y)$ yra tolydi pagal y.

Integralą

$$I = \int_0^x (kx+1)(1-x)g_a(y)\,dy + \int_x^a (kx+1)(y-x)g_a(y)\,dy = v$$

diferencijuojame pagal x ir gauname tiesinę pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$g_a'(x) + g_a(x)\frac{2k-3kx-1}{(kx+1)(1-x)} = \frac{2k}{(kx+1)(1-x)}. \tag{2}$$

Diferencialinę lygtį (2) spręsime klasikiniu metodu. Ieškome lygties bendrojo sprendinio – sprendžiam lygtį su dešine puse, lygia 0:

$$g_a'(x) + g_a(x)\frac{2k-3kx-1}{(kx+1)(1-x)} = 0,$$
$$g_a(x) = C(1-x)^{-1}(kx+1)^{-2}.$$

Ieškosime atskirojo (2) lygties sprendinio konstantų varijavimo metodu. Vadinasi, (2) diferencialinės lygties sprendinys bus:

$$g_a(x) = \frac{k^2x^2 + 2kx + C_0}{(1-x)(kx+1)^2}.$$

Gavome II lošėjo strategijos Y^* tankio funkcijos išraišką, kurioje yra vienas nežinomasis – konstanta C_0. Įstatome šią išraišką į

$$\int_0^a g_a(x)dx = 1 \tag{3}$$

ir

$$\int_0^x (kx+1)(1-x)g_a(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^a (kx+1)(y-x)g_a(y)\,\mathrm{d}y = v. \tag{4}$$

Suskaičiavę integralus bei (4) lygybėje kairės pusės koeficientą prie x prilyginę 0, gauname dviejų lygčių sistemą

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right)\left(\ln(ka+1) - \dfrac{k+1}{ka+1} - \ln(1-a) + k + 1\right) \\ \quad + \left(-\ln(ka+1) + \dfrac{k+1}{ka+1} - k - 1\right) = 1, \\ k^2\left(1 - \dfrac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right) + \left(1 - \dfrac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right)k - k^2 - ak \\ \quad + \left(1 - \dfrac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right)k\big(\ln(ka+1) - \ln(1-a)\big) \\ \quad + \left(1 - \dfrac{k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2}\right)\dfrac{1}{ka+1}(1+k) \\ \quad -k\big(\ln(ka+1)\big) - \dfrac{1}{ka+1}(1+k) = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą gauname neišreikštinę lygtį a atžvilgiu bei konstantos C_0 ir lošimo vertės v išraišką per a:

$$\begin{aligned} &\frac{1 - k(1-a)(ka+1) + k^2 + 2k}{(k+1)} \ln(ka+1) \\ &\quad - \frac{1 - k(1-a)(ka+1) + k^2 + 2k}{(k+1)} \ln(1-a) \\ &\quad -(k+1)\ln(ka+1) + 1 - k(1-a)(ka+1) - ak = 2, \\ &C_0 = 1 - k(1-a)(ka+1), \\ &v = -\ln(1-a) - a + \frac{-k(1-a)(ka+1)}{(k+1)^2} \ln\frac{ka+1}{1-a} \\ &\quad + \frac{-(1-a)}{k+1} - \frac{-(1-a)(ka+1)}{k+1}. \end{aligned}$$

Iš pirmosios lygties randame a reikšmę. Šią reikšmę įstatę į antrąją ir trečiąją lygtį, gausime C_0 ir v. Suradome II lošėjo strategiją Y^*: tankio funkciją

$$g_a(x) = \frac{k^2x^2 + 2kx + C_0}{(1-x)(kx+1)^2}.$$

Pagal mūsų darytą prielaidą I lošėjo strategija X^* aprašoma tikimybiniu pasiskirstymu su tankio funkcija f_a, kuri tašką 0 naudoja su teigiama tikimybe (taške 0 daro šuolį, lygų a) ir yra lygi nuliui už intervalo $[0, a]$, $a < 1$, ribų (a reikšmė jau žinoma iš II lošėjo strategijos Y^* skaičiavimo). Taip pat

$$I = \int_0^y (kx+1)(y-x) f_a(x)\,\mathrm{d}x + \int_y^a (kx+1)(1-x) f_a(x)\,\mathrm{d}x + ay = v, \quad 0 < y \leqslant a.$$

Šią integralinę lygybę du kartus diferencijuojame pagal y ir gauname diferencialinę lygtį

$$\frac{f_a'(y)}{f_a(y)} = \frac{2 + 3ky - k}{(ky+1)(1-y)},$$

kurios sprendinys yra

$$f_a(y) = \frac{C_1}{(ky+1)(1-y)^2}.$$

Radome I lošėjo strategijos X^* tankio funkciją.

Įrašome gautąją tankio funkcijos išraišką į

$$\int_0^a f_a(x)dx = 1 - \alpha \tag{5}$$

ir

$$\int_0^y (kx+1)(y-x) f_a(x)\,\mathrm{d}x + \int_y^a (kx+1)(1-x) f_a(x)\,\mathrm{d}x + ay = v. \tag{6}$$

Suskaičiavę integralus bei (6) lygybėje kairės pusės koeficientą prie y prilyginę 0 gauname

$$\alpha = C_1 = 1 - \frac{k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}}{(k+1)^2 + k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}},$$

$$v = -\left(1 - \frac{k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}}{(k+1)^2 + k \ln \frac{ka+1}{1-a} + \frac{a(k+1)}{1-a}}\right) \ln(1-a).$$

Radome I lošėjo strategiją X^*, nusakomą tankio funkcija:

$$f_a(x) = \frac{C_1}{(kx+1)(1-x)^\alpha}.$$

Būtinos ir pakankamos strategijų X^* ir Y^* optimalumo sąlygos:

$$\begin{aligned} &H(X^*, y) \geqslant v, \quad \forall y \notin [0, a], \\ &H(x, Y^*) \leqslant v, \quad \forall x \notin [0, a]. \end{aligned} \tag{7}$$

Skaičiuojame

$$H(X^*, 0) = \frac{1}{2}\alpha - C_1 \ln(1-a) > v.$$

Skaičiuojame

$$H(X^*, y) = \alpha y + \int\limits_0^a \frac{C_1(y-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad a < y \leqslant 1.$$

Matome, kad funkcija $H(X^*, y)$ yra didėjanti y atžvilgiu, kai $a < y \leqslant 1$. $H(X^*, a) = v$, taigi

$$H(X^*, y) > v, \quad a < y \leqslant 1.$$

Taigi pirmoji (7) sąlyga yra patenkinta.

Nagrinėjame $H(x, Y^*)$, kai $a < x \leqslant 1$:

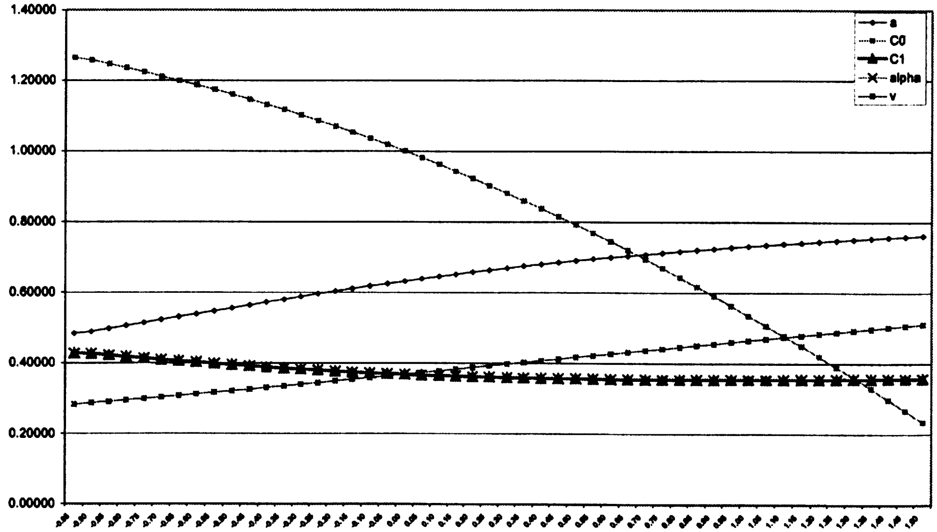
$$H(x, Y^*) = (kx+1)(1-x).$$

Tiriame funkciją $h(x) = (kx+1)(1-x)$.

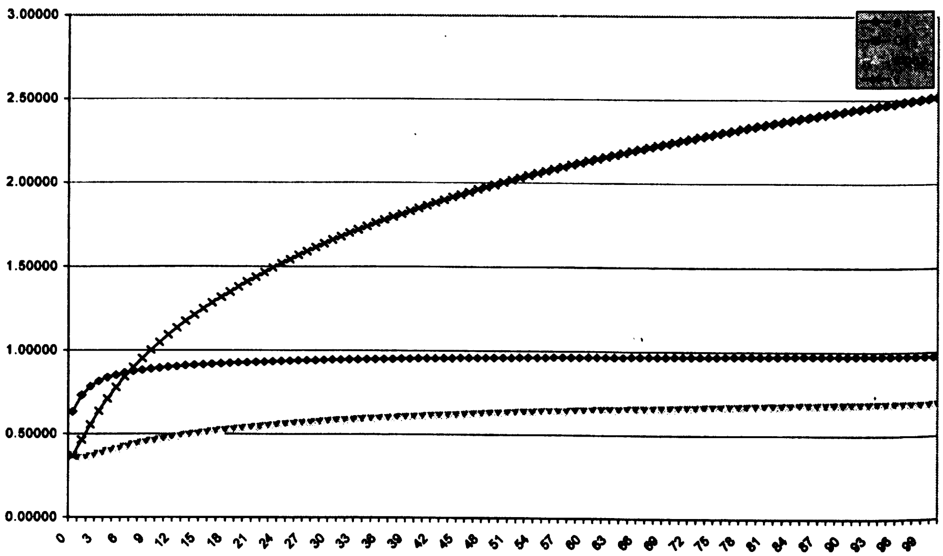
Ši funkcija $h(x)$ yra mažėjanti intervale $(a, 1]$ visiems $-1 < k < \infty$ (kai $k = 0$, $h(x) = 1 - x$ yra mažėjanti visame intervale $[0, 1]$), ir

$$H(x, Y^*) < v, \quad a < x \leqslant 1.$$

Vadinasi, rastos I ir II lošėjų strategijos X^* ir Y^* tenkina būtinas ir pakankamas optimalumo sąlygas, taigi yra optimalios.



1 pav. Lošimo parametrų priklausomybė nuo k (k kinta nuo – 0,95 iki 1,50).



2 pav. Lošimo parametrų priklausomybė nuo k (k kinta nuo 0 iki 100).

Literatūra

[1] Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль, *Введение в прикладную теорию игр*, Наука, Москва (1981).

[2] С. Карлин, *Математические методы в теории игр*, Программировании и Экономике, Мир, Москва (1964).

[3] Г. Оуэн, *Теория игр*, Мир, Москва (1971).

Competitive two person zero-sum game with linear increment function

J. Dranseikienė, D. Sūdžiūtė

We analyze the competition of two firms with increment function of the first firm $c(x) = kx+1$ – an analogue to that in [1] with the increment $c = 1$.

The optimal strategies X^*, Y^* and the value v of the game in explicit form are obtained, their parameters a, α, C_0, C_1 being the solutions of the equation system.

The values of the game parameters for various k are presented in graphic form.