Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 329–333

Nešo pusiausvyrų konvergavimas viename laiko momento parinkimo lošime

Daina SŪDŽIŪTĖ (VU)
el. paštas: daina.sudziute@maf.vu.lt

Dviejų asmenų nenulinės sumos laiko momento parinkimo lošimuose be pusiausvyrų, analogiškų toms, kurios egzistuoja nulinės sumos lošimuose, būna kitų – „atskirųjų“ – pusiausvyrų. Čia aptariama viena tokia pusiausvyrų su baigtiniais sutampančiais spektrais klasė. Šios pusiausvyros egzistuoja esant netolydiems branduoliams. Esant patenkintoms tam tikroms branduolių tolydumo sąlygoms, tokių pusiausvyrų sekos konverguoja į pusiausvyras.

Dviejų asmenų lošime abiejų lošėjų grynųjų strategijų aibės yra vienetiniai intervalai $[0,1]$, o išlošiai, esant situacijoms $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ yra reikšmės funkcijų

$$K_1(x,y) = \begin{cases} L_1(x,y), & \text{kai} \quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ M_1(x,y), & \text{kai} \quad 0 \leqslant y < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$K_2(x,y) = \begin{cases} L_2(x,y), & \text{kai} \quad 0 \leqslant x < y \leqslant 1, \\ M_2(x,y), & \text{kai} \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

paprastai vadinamų lošimo branduoliais.

Šiame darbe reikalausime, kad branduoliai tenkintų tokias sąlygas:

a) funkcijos L_1, M_1 didėja x-ui didėjant, kai y-ko reikšmė fiksuota,

b) $L_1(y,y) > M_1(1,y)$ visiems $y \in [0,1)$,

c) funkcijos L_2,M_2 didėja y-kui didėjant, kai x-so reikšmė fiksuota,

d) $M_2(x,x) > L_2(x,1)$ visiems $x \in [0,1)$.

Taip apibrėžtame lošime egzistuoja be galo daug (kontinuumas) pusiausvyrų grynomis strategijomis. Tiksliau kalbant, bet kokia sutampančių grynųjų strategijų pora $x_0 = a$, $y_0 = a$, $a \in [0,1]$ yra Nešo pusiausvyra, nes nelygybės

$$K_1(a,a) \geqslant K_1(x,a), \quad \text{kai} \quad x \in [0,1],$$
$$K_2(a,a) \geqslant K_2(a,y), \quad \text{kai} \quad y \in [0,1],$$

yra teisingos, kai sąlygos a), b), c), d) yra išpildytos.

Esant tokiai pusiausvyrai I-ojo lošėjo išlošis yra $K_1(a,a) = L_1(a,a)$, o II-ojo išlošis yra $K_2(a,a) = M_2(a,a)$. Galimi atvejai, kai vienam lošėjui geresnė pusiausvyra (a,a) negu pusiausvyra (b,b), o kitam atvirkščiai. Ieškant būdo derinti lošėjų interesus, natūralu ištyrinėti tokias Nešo pusiausvyras, kuriose abu lošėjai su teigiamomis tikimybėmis naudotų tas dvi grynąsias strategijas. Žinoma, jeigu tokios pusiausvyros egzistuoja. Tokių mišrių strategijų spektrai S_1 ir S_2 abiems lošėjams sutaptų: $S_1 = S_2 = \{a, b\}$.

Nustatysime būtinas ir pakankamas tokių pusiausvyrų egzistavimo sąlygas.

Ieškomos pusiausvyros (X, Y) strategijas pažymėkime $X = (\alpha, 1-\alpha)$, $Y = (\beta, 1-\beta)$. Čia α, β yra tikimybės, su kuriomis I ir II lošėjas renkasi grynąją strategiją a, o $1-\alpha$, $1-\beta$ yra tikimybės, su kuriomis jie renkasi strategiją b.

Tuomet būtinos ir pakankamos sąlygos, kad (X_0, Y_0) būtų Nešo pusiausvyra lošimo plėtinyje, kai strategijos mišrios, yra šios:

$$K_1(a, Y_0) = K_1(b, Y_0) = v \quad \text{(pažymime)}, \tag{1}$$

$$K_1(x, Y_0) \leqslant v, \quad \text{kai} \quad x \in [0;1], \tag{2}$$

$$K_2(X_0, a) = K_2(X_0, b) = w \quad \text{(pažymime)}, \tag{3}$$

$$K_2(X_0, y) \leqslant w, \quad \text{kai} \quad y \in [0,1]. \tag{4}$$

(čia v ir w yra atitinkamai I-ojo ir II-ojo lošėjų išlošiai situacijoje (X_0, Y_0)).

1 teorema. *Kokie bebūtų $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $a < b$, egzistuoja ir yra vienintelė mišrių strategijų pora (X_0, Y_0), tenkinanti* (1) *ir* (3) *sąlygas.*

Įrodymas. Išspręsime lygtį

$$K_1(a, Y) = K_1(b, Y),$$

t.y.

$$\beta \cdot L_1(a,a) + (1-\beta) \cdot L_1(a,b) = \beta \cdot M_1(b,a) + (1-\beta) L_1(b,b).$$

Kadangi, esant patenkintom a), b) sąlygoms yra teisingos nelygybės

$$L_1(b,b) - L_1(a,b) > 0, \quad L_1(a,a) - M_1(b,a) > 0,$$

tai ši lygtis turi vienintelį sprendinį

$$\beta_0 = \frac{L_1(b,b) - L_1(a,b)}{L_1(b,b) - L_1(a,b) + L_1(a,a) - M_1(b,a)},$$

tenkinantį ir sąlygą $0 < \beta_0 < 1$. Taigi, vienintelė strategija

$$Y_0 = (\beta_0, 1-\beta_0) = \left(\frac{L_1(b,b) - L_1(a,b)}{L_1(b,b) - L_1(a,b) + L_1(a,a) - M_1(b,a)}, \right. \\ \left. \frac{L_1(a,a) - M_1(b,a)}{L_1(b,b) - L_1(a,b) + L_1(a,a) - M_1(b,a)} \right) \tag{5}$$

tenkina (1) sąlygą.

Analogiškai, esant patenkintoms c), d) sąlygoms, lygtis

$$K_2(X,a) = K_2(X,b)$$

turi vienintelį sprendinį

$$\alpha_0 = \frac{M_2(b,b) - M_2(b,a)}{M_2(b,b) - M_2(b,a) + M_2(a,a) - L_2(a,b)}.$$

Tas sprendinys tenkina sąlygą $0 < \alpha_0 < 1$. Taip parodome, kad strategija

$$X_0 = (\alpha_0, 1-\alpha_0) = \left(\frac{M_2(b,b) - M_2(b,a)}{M_2(b,b) - M_2(b,a) + M_2(a,a) - L_2(a,b)}, \right.$$
$$\left. \frac{M_2(a,a) - L_2(a,b)}{M_2(b,b) - M_2(b,a) + M_2(a,a) - L_2(a,b)}\right) \tag{6}$$

yra vienintelė mišrioji strategija, tenkinanti (3) sąlygą. Teorema įrodyta.

2 teorema. *Tarkime, kad* $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$, $a < b$ *ir branduoliai* K_1, K_2 *tenkina* a), b), c), d) *sąlygas.*

Tuomet 1 *teoremoje surastos mišriosios strategijos* $X_0 = (\alpha_0, 1-\alpha_0)$, $Y_0 = (\beta_0, 1-\beta_0)$ *tenkina* (2) *ir* (4) *sąlygas tada ir tik tada, kai*

$$\frac{L_1(a,a) - M_1(b,a)}{L_1(b,b) - L_1(a,b)} \geqslant \frac{M_1(1,a) - M_1(b,a)}{L_1(b,b) - M_1(1,b)}, \tag{7}$$

$$\frac{M_2(a,a) - L_2(a,b)}{M_2(b,b) - M_2(b,a)} \geqslant \frac{L_2(a,1) - L_2(a,b)}{M_2(b,b) - L_2(b,1)}. \tag{8}$$

Įrodymas. Strategija Y_0 tenkina (2) nelygybę, jei

$$\beta_0 \cdot L_1(x,a) + (1-\beta_0) \cdot L_1(x,b)$$
$$\leqslant \beta_0 \cdot L_1(a,a) + (1-\beta_0) L_1(a,b), \quad \text{kai} \quad x \in [0,a), \tag{9}$$
$$\beta_0 \cdot M_1(x,a) + (1-\beta_0) L_1(x,b)$$
$$\leqslant \beta_0 \cdot M_1(b,a) + (1-\beta_0) L_1(b,b), \quad \text{kai} \quad x \in (a,b), \tag{10}$$
$$\beta_0 \cdot M_1(x,a) + (1-\beta_0) M_1(x,b)$$
$$\leqslant \beta_0 \cdot M_1(b,a) + (1-\beta_0) L_1(b,b), \quad \text{kai} \quad x \in (b,1]. \tag{11}$$

Nelygybės (9) ir (10) yra teisingos, nes funkcijos L_1 ir M_1 atitinkamuose intervaluose didėja (sąlyga a)).

Kad būtų teisinga (11) nelygybė, būtina, kad nelygybė būtų teisinga, kai $x = 1$, t.y.

$$\beta_0 \cdot \big(M_1(1,a) - M_1(b,a)\big) \leqslant (1-\beta_0)\big(L_1(b,b) - M_1(1,b)\big).$$

Ši sąlyga yra ir pakankama, kad būtų patenkinta nelygybė (11), nes $M_1(x,a)$ ir $M_1(x,b)$ intervale $(b,1]$ didėja. Įrašę atitinkamas β_0 ir $1-\beta_0$ reikšmes, gauname

$$\frac{\big(L_1(b,b)-L_1(a,b)\big)\big(M_1(1,a)-M_1(b,a)\big)}{L_1(b,b)-L_1(a,b)+L_1(a,a)-M_1(b,a)} \geqslant \frac{\big(L_1(a,a)-M_1(b,a)\big)\big(L_1(b,b)-M_1(1,b)\big)}{L_1(b,b)-L_1(a,b)+L_1(a,a)-M_1(b,a)}.$$

Pastaroji nelygybė, kadangi $L_1(b,b)-L_1(a,b)>0$, $L_1(a,a)-M_1(b,a)>0$, $M_1(1,a)-M_1(b,a)>0$, $L_1(b,b)-M_1(1,b)>0$ (sąlyga b)) ekvivalenti (7). Panašiai, remdamiesi sąlygomis c), d), gauname, kad nelygybės

$$\alpha_0 K_2(a,b)+(1-\alpha_0)M_2(b,b)\geqslant \alpha_0\cdot L_2(a,1)+(1-\alpha_0)L_2(b,1) \tag{12}$$

išpildymas yra būtina ir pakankama sąlyga, kad X_0 tenkintų (4) sąlygą. O nelygybei (12) yra ekvivalenti (8). Teorema įrodyta.

Taigi, esant patenkintoms sąlygoms a), b), c), d) ir (7), (8), egzistuoja ir yra vienintelė Nešo pusiausvyra X_0, Y_0 su spektrais $S_1 = S_2 = \{a,b\}$. Pusiausvyros strategijų išraiškos pateiktos (5) ir (6) formulėse. Pasinaudodami (1) ir (3) lygybėmis, apskaičiuojame lošėjų išlošius esant šiai pusiausvyrai:

$$v=\frac{L_1(a,a)\cdot L_1(b,b)-L_1(a,b)\cdot M_1(b,a)}{L_1(b,b)-L_1(a,b)+L_1(a,a)-M_1(b,a)}, \tag{13}$$

$$w=\frac{M_2(a,a)\cdot M_2(b,b)-M_2(b,a)\cdot L_2(a,b)}{M_2(b,b)-M_2(b,a)+M_2(a,a)-L_2(a,b)}. \tag{14}$$

Aptarsime tokių pusiausvyrų sekų konvergavimą.

Sakykime, kad skaičių poroms (a_n,b_n), $n=1,2,\ldots$; tokioms, kad $a_n\in[0,1]$, $b_n\in[0,1]$, $a_n<b_n$, yra patenkintos ir (7), (8) nelygybės. Tarkime, kad $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Kadangi tuomet kiekvienai porai (a_n,b_n) pagal 1, 2 teoremas atitinka vienintelė Nešo pusiausvyra (X_n,Y_n) bei išlošiai v_n, w_n:

$$\begin{aligned} X_n &= (\alpha_n, 1-\alpha_n)\\ &= \left(\frac{M_2(b_n,b_n)-M_2(b_n,a_n)}{M_2(b_n,b_n)-M_2(b_n,a_n)+M_2(a_n,a_n)-L_2(a_n,b_n)},\right.\\ &\qquad \left.\frac{M_2(a_n,a_n)-L_2(a_n,b_n)}{M_2(b_n,b_n)-M_2(b_n,a_n)+M_2(a_n,a_n)-L_2(a_n,b_n)}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} Y_n &= (\beta_n, 1-\beta_n)\\ &= \left(\frac{L_1(b_n,b_n)-L_1(a_n,b_n)}{L_1(b_n,b_n)-L_1(a_n,b_n)+L_1(a_n,a_n)-M_1(b_n,a_n)},\right. \end{aligned}$$

$$\left.\frac{L_1(a_n,a_n) - M_1(b_n,a_n)}{L_1(b_n,b_n) - L_1(a_n,b_n) + L_1(a_n,a_n) - M_1(b_n,a_n)}\right), \tag{16}$$

$$v_n = \frac{L_1(a_n,a_n)\cdot L_1(b_n,b_n) - L_1(a_n,b_n)\cdot M_1(b_n,a_n)}{L_1(b_n,b_n) - L_1(a_n,b_n) + L_1(a_n,a_n) - M_1(b_n,a_n)}, \tag{17}$$

$$w_n = \frac{M_2(a_n,a_n)\cdot M_2(b_n,b_n) - M_2(b_n,a_n)\cdot L_2(a_n,b_n)}{M_2(b_n,b_n) - M_2(b_n,a_n) + M_2(a_n,a_n) - L_2(a_n,b_n)} \tag{18}$$

galima analizuoti atitinkamų sekų X_n, Y_n, v_n, w_n konvergavimo klausimus. Jeigu jos konverguoja, tai ar ribiniai vektoriai $\bar{X}$, $\bar{Y}$ sudaro pusiausvyrą, jos spektras būtų $\{a,b\}$? Ar ribinės v_n ir w_n reikšmės yra ribinės pusiausvyros išlošiai?

Kadangi pusiausvyra su spektru $\{a,b\}$ gali būti tik (X_0,Y_0) (strategijos X_0, Y_0 yra pateiktos (5), (6) formulėmis), tai būtina, kad būtų $\lim X_n = X_0$, $\lim Y_n = Y_0$. Šios lygybės gali būti teisingos ir esant funkcijoms L_1, M_1, L_2, M_2 netolydžioms. Tuomet tam, kad ribinės strategijos sudarytų Nešo pusiausvyrą, pakaktų, kad taškams a, b būtų teisingos (7) ir (8) nelygybės. To negalima užtikrinti, kai L_1, M_1, L_2, M_2 nėra tolydžios.

Kita vertus, kai L_1, M_1, L_2, M_2 yra tolydžios funkcijos, pusiausvyros (X_n,Y_n) ir v_n, w_n konverguoja atitinkamai į $(\bar{X},\bar{Y})$ ir v, w. Tačiau net tik funkcijos $M_1(1,y)$ ar $L_2(x,1)$ netolydumas gali lemti, kad kuri nors iš sąlygų (7) ar (8) nebus išpildytos ir ribinės strategijos nesudarys Nešo pusiausvyros.

Literatūra

[1] Г. Оуэн, *Теория Игр*, Мир, Москва (1971).

[2] С. Карлин, *Математические методы в теории игр*, Программировании и Экономике, Мир, Москва (1964).

[3] Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль, *Введение в прикладную теорию игр*, Наука, Москва (1981).

[4] Д. Суджюте, Необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в играх на единичном квадрате, *Лит. матем. сб.*, 27(2), 178–185 (1983).

Nash equilibria – existence, uniqueness and convergence – in two person non-zero games of timing

D. Sūdžiūtė

Special class of Nash equilibria with spectra $S_1 = S_2 = \{a,b\}$ is investigated in two person non-zero games of timing.

The formulas of the existing and unique equilibria are derived when the kernels satisfy some conditions of monotonicity and boundedness.

Possibilities of convergence of sequences of the equilibria when their spectra $\{a_n,b_n\}$ converge, are surveyd.