Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 337–342

Netiesinio Šredingerio uždavinio su stiprinimo procesu sprendimas

Raimondas ČIEGIS (MII, VGTU), Genė KAIRYTĖ (MII),
Violeta PAKALNYTĖ (MII)
el. paštas: rc@fm.vtu.lt

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime uždavinį, aprašantį signalo judėjimą šviesolaidžiu. Tokio proceso matematinis modelis yra [2, 3]:

$$
\begin{aligned}
&i\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu|u|^2 u + i\alpha u = 0\,, && (1.1)\\
&u(z,0) = 0, \quad u(z,T) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant L,\\
&u(0,t) = u_0(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{aligned}
$$

čia z yra šviesolaidžio ašinė koordinatė, t yra laikas, α – energijos absorbcijos koeficientas. Energijos nuostoliai yra kompensuojami periodiškai stiprinant signalą taškuose $\tilde{z}_k = k\Delta z$:

$$
u(\tilde{z}_k, t) = \mathrm{e}^{\alpha\Delta z} u(\tilde{z}_k - 0, t). \tag{1.2}
$$

2. Baigtinių skirtumų schema

Darbe [3] uždavinys (1.1)–(1.2) buvo spręstas spektriniu metodu, darbe [2] buvo sukonstruotos dvi baigtinių skirtumų schemos, aproksimuojančios diferencialinį uždavinį (1.1)–(1.2). Pastarajame darbe buvo įrodyta, kad abi baigtinių skirtumų schemos yra stabilios, kai sprendžiame tiesinę Šredingerio lygtį su stiprinimo koeficientu. Šiame darbe įrodysime, kad baigtinių skirtumų schemos sprendinys konverguoja ir kai sprendžiame netiesinę lygtį (1.1).

Srityje $[0, Z] \times [0, T]$ apibrėžkime tolygų diskretųjį tinklą $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$

$$
\begin{aligned}
\omega_h &= \{z^n \colon\ z^n = jh, \quad j = 1, 2, \ldots, M,\ z^M = L\},\\
\omega_\tau &= \{t_j \colon\ t_j = j\tau, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1,\ t_N = T\}.
\end{aligned}
$$

Apibrėžiame naują nežinomą funkciją v [2]:

$$
v(z,t) = u(z,t)\mathrm{e}^{\alpha(z-\tilde{z}_k)},
$$

čia $\tilde{z}_k$ yra taškas, kuriame stiprinamas signalas. Funkcija v tenkina uždavinį

$$
\begin{aligned}
& i\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu e^{-\alpha(z-\tilde{z}_k)}|v|^2 v = 0, \\
& v(z,0) = 0, \quad v(z,T) = 0, \\
& v(\tilde{z}_k, t) = u(\tilde{z}_k, t).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Diferencialinį uždavinį (2.1) aproksimuokime baigtinių skirtumų schema

$$
\begin{aligned}
& iy_h + \frac{1}{2}\overset{0}{y}_{\bar{t}t} + \mu e^{-\alpha(z^{n+0.5}-\tilde{z}_k)}\frac{|y^{n+1}|^2 + |y^n|^2}{2}\overset{0}{y} = 0, \\
& y_0^n = 0, \qquad y_N^n = 0, \quad z_n \in \omega_h, \\
& y_j^0 = u_0(t_j), \quad t_j \in \omega_\tau.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Uždavinio (1.1)–(1.2) sprendinio artinį apskaičiuojame naudodami formulę

$$
w_j^n = e^{-\alpha(z^n-\tilde{z}_k)}y_j^n, \quad \text{jei} \quad z^n \leqslant \tilde{z}_k.
$$

Čia panaudojome tokius žymėjimus

$$
\begin{aligned}
& y_t = \frac{y_{j+1} - y_j}{\tau}, \qquad y_{\bar{t}} = \frac{y_j - y_{j-1}}{\tau}, \\
& y_h = \frac{y^{n+1} - y^n}{h}, \qquad \overset{0}{y} = \frac{y^{n+1} + y^n}{2}.
\end{aligned}
$$

3. Stabilumo analizė

Tirdami gautosios netiesinės baigtinių skirtumų schemos stabilumą, modifikuosime darbe [1] pasiūlytą tyrimo schemą. Nagrinėkime du pagalbinius uždavinius funkcijoms Y ir V

$$
\begin{aligned}
& i\frac{Y - y}{h} + \frac{1}{2}\overset{0}{Y}_{\bar{t}t} + \mu e^{-\alpha(z^{n+0.5}-\tilde{z}_k)} \\
& \qquad \times\left(\gamma\frac{|g|^2 + |y|^2}{2} + (1-\gamma)\frac{|Y|^2 + |y|^2}{2}\right)\overset{0}{Y} = G, \\
& \qquad\qquad Y_0 = 0, \quad Y_N = 0;
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
& i\frac{V - v}{h} + \frac{1}{2}\overset{0}{V}_{\bar{t}t} + \mu e^{-\alpha(z^{n+0.5}-\tilde{z}_k)} \\
& \qquad \times\left(\gamma\frac{|w|^2 + |v|^2}{2} + (1-\gamma)\frac{|V|^2 + |v|^2}{2}\right)\overset{0}{V} = 0, \\
& \qquad\qquad V_0 = 0, \quad V_N = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Toliau suformuluosime du rinkinius apriorinių sąlygų:

(A) $g_0 = g_N = 0, \quad w_0 = w_N = 0,$

$$||y_{\bar{t}}]| \leqslant C_1, \quad ||v_{\bar{t}}]| \leqslant C_1, \quad ||g_{\bar{t}}]| \leqslant C_2, \quad ||w_{\bar{t}}]| \leqslant C_2$$

ir

$$\text{(B)} \quad ||Y_{\bar{t}}]| \leqslant C_2, \qquad ||V_{\bar{t}}]| \leqslant C_2,$$

čia pažymėjome diskrečiąsias normas

$$||y_{\bar{t}}]|^2 = \sum_{j=1}^{N} y_{\bar{t},j}^2 \tau, \quad ||y||_C = \max_{1 \leqslant j < N} |y_j|.$$

Tada teisingos tokios dvi lemos, apibrėžiančios netiesinės baigtinių skirtumų schemos (2.2) stabilumą.

3.1 lema. *Tarkime, kad Y ir V yra, atitinkamai, uždavinių* (3.1) *ir* (3.2) *sprendiniai ir išpildytos sąlygos* (A). *Jeigu $\gamma = 1$, tai teisingas įvertis:*

$$||Y_{\bar{t}} - V_{\bar{t}}]|^2 \leqslant (1 + C_3\tau)||y_{\bar{t}} - v_{\bar{t}}]|^2 + C_4\tau||g_{\bar{t}} - w_{\bar{t}}]|^2 + C_5\tau||G_{\bar{t}}]|^2, \tag{3.3}$$

čia konstantos C_3, C_4, ir C_5 gali priklausyti nuo C_1, C_2, α, μ, bet nepriklauso nuo τ ir h.

Lemą įrodome nagrinėdami uždavinių (3.1) ir (3.2) skirtumą, padaugindami gautąją lygybę skaliariškai iš $2\tau(Y_{\bar{t}t} + V_{\bar{t}t})$ ir imdami gautosios lygybės realiąją dalį. Netiesinius narius įvertiname naudodamiesi Sobolevo įdėjimo teorema $||y||_C \leqslant \frac{1}{2}||y_{\bar{t}}]|$ ir baigtinių skirtumų skaičiavimo formulėmis.

3.2 lema. *Tarkime, kad išpildytos Lemos* 3.1 *sąlygos ir papildomi aprioriniai įverčiai* (B). *Jeigu $\gamma = 0$ ir $\tau \leqslant \tau_0 = 1/2C_4$, tai teisingas įvertis:*

$$||Y_{\bar{t}} - V_{\bar{t}}]|^2 \leqslant (1 + C_6\tau)||y_{\bar{t}} - v_{\bar{t}}]|^2 + C_7\tau||G_{\bar{t}}]|^2, \tag{3.4}$$

čia konstantos C_6, C_7, C_8 nepriklauso nuo τ ir h.

Įrodymas. 3.1 lemoje imkime

$$g = Y, \quad w = V.$$

Tada iš (3.3) gauname nelygybę

$$(1 - C_4\tau)||Y_{\bar{t}} - V_{\bar{t}}]|^2 \leqslant (1 + C_3\tau)||y_{\bar{t}} - v_{\bar{t}}]|^2 + C_5\tau||G_{\bar{t}}]|^2.$$

Imdami $\tau \leqslant \tau_0 = 1/2C_4$, po nesudėtingų pertvarkymų įrodome reikalingą stabilumo nelygybę (3.4), kurioje $C_6 = 2(C_3 + C_4)$, $C_7 = 2C_5$.

4. Baigtinių skirtumų schemos (2.2) korektiškumas

Naudodamiesi 3.1 ir 3.2 lemų tvirtinimais galime išspręsti visus pagrindinius netiesinių baigtinių skirtumų schemų analizės uždavinius.

Nagrinėkime konservatyvų iteracinį procesą

$$i\frac{\overset{s}{y}-y}{h}+\frac{1}{2}\left(\frac{\overset{s}{y}+y}{2}\right)_{\bar{t}t}+\mu e^{-\alpha(z^{n+0.5}-\bar{z}_k)}\frac{|\overset{s-1}{y}|^2+|y|^2}{2}\,\frac{\overset{s}{y}+y}{2}=0, \qquad (4.1)$$

kurio kiekviena iteracija tenkina energijos tvermės sąlygą $||\overset{s}{y}||=||y||$.

Netiesinės baigtinių skirtumų schemos (2.2) korektiškumą įrodysime matematinės indukcijos metodu. Tarkime, kad jau įrodyta, jog funkcija y tenkina apriorinius įverčius (A).

4.1 lema. *Jeigu* $\tau \leqslant \tau_1 = \min(1/C_3,\ 1/2\,C_4)$, *tai visi iteracijų sekos nariai yra tolygiai aprėžti:*

$$||\overset{s}{y}_{\bar{t}}]| \leqslant C_2 = 2C_1.$$

Įrodymas. 3.1 lemoje imkime tokias funkcijas:

$$Y=\overset{s}{y},\quad g=\overset{s-1}{y},\quad V=v=w=0,\quad G=0.$$

Tada iš nelygybės (3.3) gauname įvertį

$$||\overset{s}{y}_{\bar{t}}]|^2 \leqslant (1+C_3\tau)C_1^2+4C_4C_1^2\tau.$$

Jeigu $\tau \leqslant \tau_1 = \min(1/C_3,\ 1/2\,C_4)$, tai gauname lemos tvirtinimą.

4.2 lema. *Jeigu* $\tau \leqslant \tau_1$, *tai iteracijų seka, apibrėžta lygtimi* (4.1), *yra Košy seka.*

Įrodymas. 3.1 lemoje imkime tokias funkcijas

$$Y=\overset{s+1}{y},\quad y=v,\quad g=V=\overset{s}{y},\quad w=\overset{s-1}{y},\quad G=0.$$

Tada iš nelygybės (3.3) gauname įvertį

$$||(\overset{s+1}{y}-\overset{s}{y})_{\bar{t}}]|^2 \leqslant C_4\tau||(\overset{s}{y}-\overset{s-1}{y})_{\bar{t}}]|^2 \leqslant \frac{1}{2}||(\overset{s}{y}-\overset{s-1}{y})_{\bar{t}}]|^2.$$

Lema įrodyta.

Pasinaudoję Košy sekų savybėmis gauname, kad iteracijų seka konverguoja

$$\lim_{s\to\infty}\overset{s}{y}=y^{n+1},\quad ||y_{\bar{x}}^{n+1}]|\leqslant C_2.$$

4.3 lema. *Jeigu $\tau \leqslant \tau_1$, tai baigtinių skirtumų shema* (2.2) *turi vienintelį sprendinį.*

Įrodymas. Tarkime, kad egzistuoja du sprendiniai y^{n+1} ir v^{n+1}. Tada 3.2 lemoje imkime tokias funkcijas

$$Y = y^{n+1}, \quad y = y^n, \quad V = V^{n+1}, \quad v = y^n, \quad G = 0.$$

Iš nelygybės (3.4) gauname įvertį

$$||(y^{n+1} - v^{n+1})_{\bar{t}}]|^2 \leqslant 0 \implies y^{n+1} = v^{n+1}.$$

Lema įrodyta.

Tirsime diskrečiojo sprendinio konvergavimą.

4.4 lema. *Jeigu $\tau \leqslant \tau_1$, tai teisingas toks baigtinių skirtumų shemos* (2.2) *stabilumo įvertis*

$$||(y^n - u^n))_{\bar{t}}]| \leqslant \sqrt{C_7} e^{0.5 C_6 z^n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} ||\Psi^j_{\bar{t}}]|.$$

Įrodymas. 3.2 lemoje imkime tokias funkcijas

$$Y = u^{n+1}, \quad y = u^n, \quad V = y^{n+1}, \quad v = y^n, \quad G = \Psi^{n+1}.$$

Tada iš nelygybės (3.4) gauname įvertį

$$||(y^{n+1} - u^{n+1})_{\bar{t}}]|^2 \leqslant (1 + C_6\tau)||(y^n - u^n)_{\bar{t}}]|^2 + C_7\tau||\Psi^{n+1}_{\bar{t}}]|^2.$$

Lemos įrodymas gaunamas rekurentiškai pritaikius šią nelygybę visiems diskrečiojo tinklo ω_h taškams z^j, $j = n+1, n, \ldots, 1$.

Norint užbaigti konvergavimo analizę, lieka įvertinti baigtinių skirtumų schemos (2.2) aproksimacijos paklaidą.

4.5 lema. *Baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos paklaida tenkina įvertį*

$$||\Psi^{n+1}_{\bar{t}}]| \leqslant C(\tau^2 + h^2).$$

Įrodymas. Funkciją y_j pratęskime už tinklo ω_τ ribų nelyginiu būdu:

$$y_{-1} = -y_1, \quad y_{N+1} = -y_{N-1}.$$

Tada baigtinių skirtumų lygtis (2.2) yra teisinga ir kraštiniuose taškuose. Pasinaudoję Teiloro skleidiniu su liekamuoju Lagranžo nariu, gauname lemos tvirtinimą.

Tokiu būdu įrodėme šią teoremą.

4.1 teorema. *Jeigu $\tau \leqslant \tau_1$, tai baigtinių skirtumų schema* (2.2) *turi vienintelį sprendinį, kurį randame iteraciniu procesu* (4.1), *šis diskretusis sprendinys konverguoja į diferencialinio uždavinio* (2.1) *sprendinį ir teisingas toks tikslumo įvertis:*

$$||y^n - u^n|| \leqslant C(\tau^2 + h^2). \tag{4.2}$$

Remdamiesi įverčiu (4.2) įrodome, kad pakankamai mažiems $\tau \leqslant \tau_0$, $h \leqslant h_0$ funkcija y^{n+1} tenkina apriorinius įverčius (A), todėl matematinės indukcijos metodo įrodymo schema yra pilnai pagrįsta.

Literatūra

[1] Raim. Čiegis, Rem. Čiegis and M. Meilūnas, On one general investigation scheme of difference schemes, *Liet. Matem. Rink.*, **36**(3), 281–302 (1996).

[2] R. Čiegis, G. Kairytė and V. Pakalnytė, Šredingerio lygties su stiprinimo procesu skaitinis sprendimas, *LMD mokslo darbai*, III, 409–413 (1999).

[3] G. Moebs, A multilevel method for the resolution of a stochastic weakly damped nonlinear Schrödinger equation, *Appl. Numer. Math.*, **26**(3), 353–375 (1998).

On nonlinear Schrödinger problem with amplification process

R. Čiegis, G. Kairytė, V. Pakalnytė

In this paper we consider the nonlinear Schrödinger problem with amplification process. We define a new unknown function and derive a nonlinear equation for this function. Theoretical analysis of a symmetrical finite difference scheme is given and the convergence is proved.