Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 343–349

Medienos džiovinimo proceso matematinis modeliavimas

Raimondas ČIEGIS (MII, VGTU), Vadimas STARIKOVIČIUS (VU, VGTU), Andrius VOLKAS (VU)
el. paštas: rc@fm.vtu.lt, vs@sc.vtu.lt, andrius@vic.lt

1. Įvadas

Diegiant pramonines technologijas dažnai yra svarbu tiksliai prognozuoti drėgmės koncentracijos kitimą medienoje. Šio darbo tikslas yra sukonstruoti nesąlygiškai stabilią maksimumo normoje baigtinių skirtumų schemą medienos drėkinimo (džiovinimo) uždaviniui spręsti. Drėgmės dinamika porinėse medžiagose, t.y. difuzija, konvekcija, cheminių jungčių procesai, šių procesų sąveika, jų priklausomybė nuo temperatūros, dar nėra iki galo aiški. Todėl matematinio modelio parinkimas nėra trivialus uždavinys, ką rodo ir įvairiose pastarųjų metų publikacijose siūlomų modelių gausa.

Išskyrus tuos atvejus, kai procese veikia stiprios srovės, difuzija yra pagrindinė drėgmės dinamikos priežastis. Daugelis autorių [2, 3], tyrusių medienos drėkinimo uždavinį, drėgmės judėjimą siūlo aprašyti vien tik difuzijos procesu, t.y. naudoti šilumos laidumo lygtį su netiesiniu difuzijos nariu. Akivaizdu, kad modelio tikslumas tada priklauso nuo difuzijos funkcijos parinkimo. Dažniausiai yra naudojama eksponentinė difuzijos funkcija [3], tačiau yra pateikti ir kitokie pasiūlymai [2].

Alternatyvus kelias yra išplėsti modelį, aprašant ir kitus vykstančius procesus. Mediena yra poringa medžiaga, todėl bendra drėgmės masės koncentracija yra išskaidoma į dvi dalis: drėgmės masės koncentraciją medienos ertmėse ir drėgmės masės koncentraciją medienos sienelėse. Daroma prielaida, kad tarp abiejų išskirtų terpių vyksta drėgmės apykaita, o difuzijos procesas vyksta tik ertmėse. Modifikuotame modelyje šilumos laidumo lygtis keičiama dviejų diferencialinių lygčių sistema. Toks modelio papildymas siūlomas darbe [1]. Literatūroje nagrinėjamas ir dar vienas medienos drėkinimo proceso matematinio modelio papildymas, įvertinantis ir konvekcijos procesą. Todėl drėgmės masės koncentracijos ertmėse kitimą aprašanti lygtis papildoma pernešimo nariu. Pastebėsime, kad gautas matematinis modelis tinka platesnei uždavinių klasei. Pvz., teršalų pernešimas aprašomas tais pačiais procesais, kaip ir medienos drėkinimas [4].

Šiame darbe yra formuluojamas diferencialinis uždavinys, apibėžiantis pasirinktą matematinį modelį, sudaroma baigtinių skirtumų schema, aptariama jos aproksimacijos paklaida ir realizacija. Paskutiniame skirsnyje yra įrodomas schemos nesąlyginis stabilumas maksimumo normoje ir gaunami diskrečiojo sprendinio konvergavimo įverčiai.

2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėjame tokį procesą. Per abu medienos juostelės galus įteka drėgmės srautai, šie srautai yra homogeniškai pasiskirstę visame drėkinamame paviršiuje. Juostelės šoniniai paviršiai yra izoliuoti. Juostelės ilgį laikome lygiu vienetui, o dydžiai, reiškiantys jos plotį ir aukštį, lyginant su ilgiu, yra labai maži. Tokiu būdu užtenka nagrinėti vienos erdvinės dimensijos procesą.

Drėgmės masės koncentraciją medienos ertmėse žymėsime funkcija c, o sienelėse - funkcija s. Darome prielaidą, kad tarp abiejų terpių vyksta drėgmės apykaita, o ertmėse dar vyksta difuzijos ir konvekcijos procesai. Gauname dviejų differencialinių lygčių sistemą:

$$(1-m)\frac{\partial c}{\partial t} + \nu\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(d(x)\frac{\partial c}{\partial x}\right) - \frac{\partial s}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = p(lc - s), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.2}$$

kur $d(x)$ – difuzijos funkcija, dažnai priklausanti ir nuo drėgmės koncentracijos ertmėse, ν – pernešimo koeficientas, p – masės pernešimą iš ertmių į sieneles žymintis koeficientas, l – koeficientas, priklausantis nuo suminio potencialo (garų slėgio, santykinės drėgmės, cheminio potencialo), m – poringumo koeficientas.

Taip pat formuluojame pradines sąlygas:

$$c(0,x) = c_0, \quad s(0,x) = s_0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Kraštinės sąlygos užduodamos taškuose $x = 0$ ir $x = 1$:

$$d(0)\,\frac{\partial c(t,0)}{\partial x} = \alpha(c(t,0) - c_1), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial c(t,1)}{\partial x} = 0, \tag{2.5}$$

kur c_1 – drėgmės koncentracija ertmėse, pasiekiama prisotinus medieną, α – drėgmės srauto, įtekančio į juostelę, stiprumą žymintis koeficientas.

Iš fizikinių prielaidų gauname, kad ν, p, l, α, c_0, c_1, s_0 – neneigiami koeficientai, $0 < m < 1$, $0 < d_0 \leqslant d(x) \leqslant d_1$.

3. Baigtinių skirtumų schema

Apibrėžiame diskretųjį tinklą:

$$\Omega_{\tau\times h} = \{(t^n, x_i):\ t^n = n\tau,\ x_i = ih,\ i = 0,\dots,N,\ n = 0,\dots,K\},$$

kur $Nh = 1$ ir $K\tau = T$. Naudosime standartinius žymėjimus:

$$y_t = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau},\ y_{\bar{x}}^n = \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h},\ y_x^n = \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h},\ a_i = \frac{d(x_i) + d(x_{i-1})}{2}.$$

Baigtinių skirtumų schemą gauname aproksimuodami diferencialinį lygtį (2.1):

$$(1 - m)u_t + \nu u_{\bar{x}}^{n+1} = (a u_{\bar{x}}^{n+1})_x - p(l u^{n+1} - v^n), \quad i = 1, \ldots, N - 1, \tag{3.1}$$

kraštines sąlygas (2.5), (2.4):

$$\frac{h}{2}(1 - m)u_{t,0} + \frac{h}{2}\nu\frac{\alpha}{d(0)}(u_0^{n+1} - c_1)$$
$$= a_1 u_{x,0}^{n+1} - \alpha(u_0^{n+1} - c_1) - \frac{h}{2}p(l u_0^{n+1} - v_0^n), \tag{3.2}$$

$$\frac{h}{2}(1 - m)u_{t,N} = -a_N u_{\bar{x},N}^{n+1} - \frac{h}{2}p(l u_N^{n+1} - v_N^n), \tag{3.3}$$

diferencialinį lygtį (2.2):

$$v_t = p(l u^{n+1} - v^{n+1}), \quad i = 0, \ldots, N \tag{3.4}$$

ir pradines sąlygas (2.3):

$$u_i^0 = c_0, \quad v_i^0 = s_0, \quad i = 0, \ldots, N. \tag{3.5}$$

Kraštinių sąlygų aproksimacija sudaryta taip, kad būtų tenkinamas maksimumo principas. Pasinaudota prielaida, kad lygtis (2.1) yra teisinga ir kraštiniuose taškuose.

Sukonstruotos schemos realizacija yra ekonomiška. Tiesinių lygčių sistema (3.1)-(3.3) išsprendžiama perkelties metodu, o funkcija v^{n+1} apskaičiuojama pagal išreikštines formules (3.4).

Pažymėkime $\Psi_{1,i}^{n+1}$ lygties (3.1), $\Psi_{2,i}^{n+1}$ lygties (3.4), o $\Psi_{1,0}^{n+1}$ ir $\Psi_{1,N}^{n+1}$ kraštinių sąlygų aproksimacijos paklaidas. Atlikę nesudėtingus skaičiavimus Teiloro skleidinių pagalba įrodome lemą:

3.1 lema. *Jeigu diferencialinio uždavinio* (2.1)–(2.4) *sprendinio funkcijos* $c(x,t)$ *ir* $s(x,t)$ *yra tokios, kad egzistuoja ir yra aprėžtos jų išvestinės* $\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 c}{\partial x^4}$, $d''(x)$, *tai*

$$|\Psi_{1,i}^{n+1}| \leqslant C(\tau + h), \quad i = 1, \ldots, N - 1,$$
$$|\Psi_{1,0}^{n+1}| \leqslant C(\tau + h^2), \quad |\Psi_{1,N}^{n+1}| \leqslant C(\tau + h^2),$$
$$|\Psi_{2,i}^{n+1}| \leqslant C\tau, \quad i = 0, \ldots, N.$$

4. Stabilumo analizė

Tegul $\tilde{u}_i^n = c(t^n, x_i) - u_i^n$, $\tilde{v}_i^n = s(t^n, x_i) - v_i^n$ yra skirtuminių sprendinių paklaidos. Jos tenkina tokią baigtinių skirtumų schemą :

$$(1-m)\tilde{u}_t + \nu\tilde{u}_{\bar{x}}^{n+1} = (a\tilde{u}_{\bar{x}}^{n+1})_x - p(l\tilde{u}^{n+1} - \tilde{v}^n) + \Psi_{1,i}^{n+1}, \tag{4.1}$$
$$i = 1, \ldots, N-1,$$
$$\frac{h}{2}(1-m)\tilde{u}_{t,0} + \alpha\left(\frac{\nu h}{2d(0)} + 1\right)\tilde{u}_0^{n+1}$$
$$= a_1\tilde{u}_{x,0}^{n+1} - \frac{hp}{2}(l\tilde{u}_0^{n+1} - \tilde{v}_0^n) + \Psi_{1,0}^{n+1}, \tag{4.2}$$
$$\frac{h}{2}(1-m)\tilde{u}_{t,N} = -a_N\tilde{u}_{\bar{x},N}^{n+1} - \frac{hp}{2}(l\tilde{u}_N^{n+1} - \tilde{v}_N^n) + \Psi_{1,N}^{n+1}, \tag{4.3}$$
$$\tilde{v}_t = p(l\tilde{u}^{n+1} - \tilde{v}^{n+1}) + \Psi_{2,i}^{n+1}, \quad i = 0, \ldots, N, \tag{4.4}$$
$$\tilde{u}_i^0 = \tilde{v}_i^0 = 0, \quad i = 0, \ldots, N. \tag{4.5}$$

Parodysime, kad skirtuminė schema (4.1)–(4.5) yra nesąlygiškai stabili. Apibrėžkime normas

$$\|\tilde{w}^n\|_1 = \|\tilde{u}^n\|_C + \frac{1+p\tau}{1-m}\|\tilde{v}^n\|_C,$$
$$\|\Psi_1^{n+1}\|_2 = \max\left\{\max_{0<i<N}|\Psi_{1,i}^{n+1}|,\ \frac{2}{h}|\Psi_{1,0}^{n+1}|,\ \frac{2}{h}|\Psi_{1,N}^{n+1}|\right\},$$
$$\|\Psi^n\|_3 = \|\Psi_1^n\|_2 + \|\Psi_2^n\|_C.$$

4.1 teorema. *Baigtinių skirtumų schema 3.1–3.2 yra nesąlygiškai stabili ir teisingas įvertis*

$$\|\tilde{w}^{n+1}\|_1 \leqslant \|\tilde{w}^n\|_1 + \frac{\tau}{1-m}\|\Psi^n\|_3. \tag{4.6}$$

Įrodymas. Lygtį (4.1) padauginame iš $\tau/(1-m)$. Pasinaudoję maksimumo principu, gauname įverčius

$$\left(1 + \frac{\tau}{1-m}\left(\frac{\nu}{h} + \frac{a_{i+1}+a_i}{h^2} + pl\right)\right)|\tilde{u}_i^{n+1}|$$
$$\leqslant \|\tilde{u}^n\|_C + \frac{\tau}{1-m}\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{h^2} + \frac{\nu}{h}\right)\|\tilde{u}^{n+1}\|_C + \frac{p\tau}{1-m}\|\tilde{v}^n\|_C$$
$$+ \frac{\tau}{1-m}\max_{0<i<N}|\Psi_{1,i}^{n+1}|, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{4.7}$$

Analogiškai, iš kraštinių sąlygų išplaukia įverčiai

$$\left(1+\frac{\tau}{1-m}\left(\frac{2a_1}{h^2}+pl+\alpha\left(\frac{\nu}{d(0)}+\frac{2}{h}\right)\right)\right)|\tilde{u}_0^{n+1}|$$
$$\leqslant \|\tilde{u}^n\|_C+\frac{\tau}{1-m}\left(\frac{2a_1}{h^2}\|\tilde{u}^{n+1}\|_C+p\|\tilde{v}^n\|_C+\frac{2}{h}|\Psi_{1,0}^{n+1}|\right) \tag{4.8}$$
$$\times\left(1+\frac{\tau}{1-m}\left(\frac{2a_N}{h^2}+pl\right)\right)|\tilde{u}_N^{n+1}|$$
$$\leqslant \|\tilde{u}^n\|_C+\frac{\tau}{1-m}\left(\frac{2a_N}{h^2}\|\tilde{u}^{n+1}\|_C+p\|\tilde{v}^n\|_C+\frac{2}{h}|\Psi_{1,N}^{n+1}|\right) \tag{4.9}$$

Iš nelygybių (4.7-(4.9) išplaukia įvertis

$$\|\tilde{u}^{n+1}\|_C\leqslant\left(1+\frac{pl\tau}{1-m}\right)^{-1}\left(\|\tilde{u}^n\|_C+\frac{p\tau}{1-m}\|\tilde{v}^n\|_C+\frac{\tau}{1-m}\|\Psi_1^{n+1}\|_2\right). \tag{4.10}$$

Iš lygties (4.4), pasinaudoję (4.10), gauname įvertį:

$$(1+p\tau)\|\tilde{v}^{n+1}\|_C \leqslant \left(1+\frac{pl\tau}{1-m}\right)^{-1}\left(\|\tilde{v}^n\|_C+\frac{pl\tau}{1-m}((1-m)\|\tilde{u}^n\|_C\right.$$
$$\left.+(1+p\tau)\|\tilde{v}^n\|_C+\tau\|\Psi_1^{n+1}\|_2)\right)+\tau\|\Psi_2^{n+1}\|_C. \tag{4.11}$$

Pridėję prie nelygybės (4.10) nelygybę (4.11), padalintą iš $1-m$, gauname teoremos tvirtinimą (4.6).

Apskaičiavę aproksimacijos paklaidos normą $\|\Psi^{n+1}\|_3$, įrodome tokius skaitinio sprendinio paklaidos įverčius

$$\|\tilde{u}^n\|_C \leqslant C(\tau+h+\tau/h), \quad \|\tilde{v}^n\|_C \leqslant C(\tau+h+\tau/h). \tag{4.12}$$

1 išvada. *Baigtinių skirtumų schemos* (3.1)–(3.5) *sprendinys konverguoja į diferencialinio uždavinio* (2.1)–(2.5) *sprendinį, jeigu* $\tau = C_1 h^{1+\delta}$, *kur* $C_1 > 0$, $\delta > 0$.

2 išvada. *Baigtinių skirtumų schemos* (4.1)–(4.5) *su homogeninėmis kraštinėmis sąlygomis* ($\Psi_1(t^n, x_0) = 0$, $\Psi_1(t^n, x_N) = 0$) *sprendiniams galioja nelygybės:*

$$\|\tilde{u}^n\|_C \leqslant C(\tau+h), \quad \|\tilde{v}^n\|_C \leqslant C(\tau+h).$$

Sąlyginis schemos (4.1)–(4.3) konvergavimas gautas tik dėl kraštinių sąlygų įtakos. Pagerinsime įverčius (4.12) naudodami singuliarių taškų išskyrimo metodiką. Schemos (4.1)–(4.3) sprendinio ieškosime tokiu pavidalu: $(\tilde{u}^n,\tilde{v}^n)^T = (\tilde{U}^n,\tilde{v}^n)^T + (z^n,0)^T$.

Funkcija z_i^n yra skirtuminės schemos

$$\begin{aligned}
&(1-m)z_t + \nu z_{\bar{x}}^{n+1} = (a z_{\bar{x}}^{n+1})_x - pl z_i^{n+1}, \\
&\frac{h}{2}(1-m)z_{t,0} + \alpha\left(\frac{\nu h}{2d(0)}+1\right) z_0^{n+1} = a_1 z_{x,0}^{n+1} - \frac{hpl}{2} z_0^{n+1} + \Psi_{1,0}^{n+1}, \\
&\frac{h}{2}(1-m)z_{t,N} = -a_N z_{\bar{x},N}^{n+1} - \frac{hpl}{2} z_N^{n+1} + \Psi_{1,N}^{n+1}, \\
&\quad z_i^0 = 0, \quad i = 0,\dots,N
\end{aligned} \tag{4.13}$$

sprendinys. Tirsime skirtuminę schemą (4.13). Apibrėžiame tokias konstantas

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \max_{1\leqslant n\leqslant K} |\Psi_1(t^n, x_0)| = O(\tau + h^2), \\
\Gamma_N &= \max_{1\leqslant n\leqslant K} |\Psi_1(t^n, x_N)| = O(\tau + h^2).
\end{aligned}$$

Remiantis maksimumo principu įrodome, kad $|z_i^n| \leqslant Z_i$, $n = 0,\dots,K$, kur Z_i yra skirtuminės schemos

$$\begin{aligned}
&-(aZ_{\bar{x}})_x + \nu Z_{\bar{x}} = 0,\ i = 1,\dots,N-1, \\
&-a_1 Z_{x,0} + \left(\alpha\left(\frac{\nu h}{2d(0)}+1\right) + \frac{hpl}{2}\right) Z_0 = \Gamma_0, \\
&a_N Z_{\bar{x},N} + \frac{hpl}{2} Z_N = \Gamma_N
\end{aligned} \tag{4.14}$$

sprendinys. Padauginame (4.14) skirtumines lygtis iš $Z_i h$ ir susumuojame nuo 1 iki $N-1$. Pritaikę sumavimo dalimis formulę, gauname

$$\begin{aligned}
&\left(\left(a + \frac{\nu h}{2}\right) Z_{\bar{x}}, Z_{\bar{x}}\right] + \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{hpl}{2}\left(1 + \frac{\nu h}{a_N}\right)\right) Z_N^2 \\
&\qquad + \left(\alpha\frac{\nu h}{2d(0)} + \alpha + \frac{hpl}{2} - \frac{1}{2}\nu\right) Z_0^2 = \Gamma_0 Z_0 + \left(1 + \frac{\nu h}{a_N}\right)\Gamma_N Z_N.
\end{aligned}$$

Tarkime, $\alpha - \frac{1}{2}\nu \geqslant 0$. Tada pasinaudoję įdėjimo teorema $\|Z\|_C^2 \leqslant 2\left(\|Z_{\bar{x}}]|^2 + Z_N^2\right)$, įrodome, kad $\|Z\|_C \leqslant C\max\{\Gamma_0, \Gamma_N\} = O(\tau + h^2)$.

$(\tilde{U}_i^n, \tilde{v}_i^n)^T$ yra sprendinys uždavinio (4.1)–(4.5) su homogeninėmis kraštinėmis sąlygomis ir $\tilde{\Psi}_2(t^n, x_i) = \Psi_2(t^n, x_i) + pl z_i^{n+1}, \quad i = 0,\dots,N$.

Remiantis 2 išvada gauname įverčius

$$\|\tilde{U}^n\|_C \leqslant C(\tau + h), \quad \|\tilde{v}^n\|_C \leqslant C(\tau + h).$$

Todėl įrodėme nesąlyginį baigtinių skirtumų schemos (3.1)–(3.5) sprendinio tikslumo įvertį:

$$\|\tilde{u}^n\|_C \leqslant C(\tau + h), \quad \|\tilde{v}^n\|_C \leqslant C(\tau + h).$$

Literatūra

[1] A. Aboltinš, A. Buikis, J. Cepitis, H. Kalis and A. Reinfelds, Diffusion and chemical attachment of substances with simple molecular structure in wood, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI98*, B.G. Teubner, Stutgart, Leipzig, 188–195 (1999).

[2] X. Bui, E. Choong, W. Rudd, Numerical methods for solving the equation for diffusion through wood during drying, *Wood Science* **13**(2) (1991).

[3] A. Droin-Josserand, J. Taverdet, J. Vergrand, Modeling the absorbtion and desorption of moisture by wood in an atmosphere of constant and programmed relative humidity, *Wood Sci. Technol.*, **22**, 299–310 (1988).

[4] M. Hilden, G. Steinebach, ENO-discretizations in MOL-applications: some examples in river hydraulics, *Applied Numerical Mathematics*, **28**, 293–308 (1998).

Mathematical modelling of wood drying process

R. Čiegis, V. Starikovičius, A. Volkas

This work discusses issues on the design of finite difference schemes for modelling the moisture movement process in the wood. A new finite difference scheme is proposed. The stabilty and convergence in the maximum norm are proved.