Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 430–435

Daugiamatės automatinio valdymo sistemos matematinio modelio tyrimas

Jonas RIMAS (KTU)
el. paštas: jonas.rimas@fmf.ktu.lt

Automatinio valdymo sistemos naudojamos įvairiuose gamybos procesuose, informacijos perdavimo ir paskirstymo tinkluose [1, 2]. Dažnai tenka įvertinti perduodamų signalų vėlavimą tokiose sistemose. Nepaisant didelių pasiekimų projektuojant ir įdiegiant automatines valdymo sistemas, darbai, skirti tiksliam analiziniam tokių sistemų tyrimui, yra aktualūs. Konkrečios daugiamatės automatinio valdymo sistemos su vėlinimais tikslus analizinis tyrimas pateiktas šiame darbe.

Nagrinėsime lygtį

$$Dx(t) = B_0x(t) + B_1x(t-\tau) + z(t), \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius (taikomas apibendrintoms funkcijoms), $B_0 = -\kappa\, E$, E – vienetinė n-tosios eilės matrica, κ – koeficientas, $B_1 = \frac{\kappa}{2}B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

– n-tosios eilės matrica, $x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, τ – pastovus vėlinimas, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(1) lygtis yra ryšio tinklo sinchronizacijos sistemos (automatinio valdymo sistemos), sudarytos iš n sujungtų į žiedą generatorių, matematinis modelis. Jos sprendinys gali būti užrašytas taip [2]:

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} \left(A^{-1}B_1\mathrm{e}^{-p\tau}\right)^l A^{-1}Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau;$$

čia $A = pE - B_0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{p+\kappa}E$, $Z(p) \div z(t)$.

Panaudoję (2) pažymėjimą, turėsime

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{l} \frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}} e^{-pl\tau} B^{l} Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau. \tag{3}$$

Iš (3) išplaukia

$$h(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{l} \frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}} \mathrm{e}^{-pl\tau} B^{l}, \quad 0 < t < (L+1)\tau; \tag{4}$$

čia $h(t)$ – sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica, $h_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ – i-tojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j-tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį.

Rasime pereinamųjų funkcijų išraiškas. Tuo tikslu apskaičiuosime matricos B l-tąjį laipsnį. Skaičiavimus atliksime pasinaudoję formule [3]

$$B^{l} = TJ^{l}T^{-1}; \tag{5}$$

čia J – matricos B Žordano forma. T – transformuojančioji matrica. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{6}$$

Pažymėkime

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Tada

$$|B - \lambda E| = D_n(-\lambda). \tag{8}$$

Iš (7) išplaukia

$$D_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - 2\Delta_{n-2}(\alpha) - 2(-1)^{n} \tag{9}$$

ir

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - \Delta_{n-2}(\alpha) \quad (\Delta_2(\alpha) = \alpha^2 - 1, \quad \Delta_1(\alpha) = \alpha). \tag{10}$$

Išsprendę (10) skirtuminę lygtį, randame $\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$D_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2(-1)^n; \tag{11}$$

čia $U_n(x)$ yra n-tojo laipsnio antrojo tipo Čebyševo daugianaris.

Pasinaudoję lygybe $T_n(x) = \frac{1}{2}\left(U_n(x) - U_{n-2}(x)\right)$ [4], turime

$$D_n(\alpha) = 2\left[T_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) - (-1)^n\right]; \tag{12}$$

čia $T_n(x)$ yra n-tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Visi daugianario $T_n(x)$ nuliai yra intervale $[-1, 1]$ ir gali būti surasti naudojantis formule

$$x_{nk} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Tai išplaukia iš žinomos lygybės

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{14}$$

Panaudoję (13) išraišką, randame daugianario $T_n(y) - (-1)^n$ nulius:

$$y_{nk} = \cos\frac{k\pi}{n}; \tag{15}$$

čia $k = 1, 3, 5, \ldots, n$, kai n nelyginis, ir $k = 0, 2, 4, \ldots, n$, kai n lyginis.

Toliau nagrinėsime atvejį, kai n nelyginis, t.y., kai $n = 2p + 1$, $(p \in N)$.

Remdamiesi (8), (12) ir (15) išraiškomis, užrašome (6) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes) [4]:

$$\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, 3, 5, \ldots, n. \tag{16}$$

Tikrinė reikšmė λ_n yra paprastoji, o tikrinės reikšmės λ_k, $k = 1, 3, 5, \ldots, n-2$ – kartotinės (kartotinumas $l_k = 2$).

Rasime marticos B Žordano formą (matricą J). Paprastajai tikrinei reikšmei λ_n matricoje J atitiks viena Žordano ląstelė $J_1(\lambda_n)$. Kartotinei tikrinei reikšmei λ_i ($i = 1, 3, 5, \ldots, n-2$) matricoje J atitiks dvi Žordano ląstelės $J_1(\lambda_i)$, nes rangas $r(B - \lambda_i E) = n - 2$ ir $n - r(B - \lambda_i E) = 2$, $i = 1, 3, 5, \ldots, n-2$ (čia n – matricos B eilė) [3]. Įvertinę tai užrašome matricos B Žordano formą

$$J = \operatorname{diag}\left(\lambda_1\lambda_1\lambda_3\lambda_3\ldots\lambda_{n-2}\lambda_{n-2}\lambda_n\right). \tag{17}$$

Remdamiesi lygybe $J = T^{-1}BT$, randame matricą T ir jai atvirkštinę matricą T^{-1}. Apskaičiuojame matricos B l-tąjį laipsnį:

$$B^l = TJ^lT^{-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n+1}{2}} & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{\frac{n+1}{2}} & a_{\frac{n-1}{2}} & a_{\frac{n-3}{2}} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \qquad (18)$$

čia

$$a_m(l) = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} l_{n-2k+2}\lambda^l_{n-2k+2}T_{m-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k+2}}{2}\right), \quad m = \overline{1, \frac{n+1}{2}}, \qquad (19)$$

l_i – tikrinio skaičiaus λ_i kartotinumas, $n = 2p+1$ ($p \in N$) – matricos B eilė, $T_k(x)$ – k-tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Įstatę (18) į (4) ir atlikę reikiamus pertvarkymus, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix};$$

čia

$$\begin{aligned}
&h_{i\,i}(t) = h_1(t), \quad i = \overline{1, n}, \\
&h_{i\,i+1}(t) = h_{i+1\,i}(t) = h_2(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \\
&h_{i\,i+2}(t) = h_{i+2\,i}(t) = h_3(t), \quad i = \overline{1, n-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&h_{i\,i+\frac{n-3}{2}}(t) = h_{i+\frac{n-3}{2}\,i}(t) = h_{\frac{n-1}{2}}(t), \quad i = \overline{1, \frac{n+3}{2}}, \\
&h_{ii+\frac{n-1}{2}}(t) = h_{i+\frac{n-1}{2}\,i}(t) = h_{\frac{n+1}{2}}(t), \quad i = \overline{1, \frac{n+1}{2}}, \\
&h_{i\,i+\frac{n+1}{2}}(t) = h_{i+\frac{n+1}{2}\,i}(t) = h_{\frac{n+1}{2}}(t), \quad i = \overline{1, \frac{n-1}{2}}, \\
&h_{i\,i+\frac{n+3}{2}}(t) = h_{i+\frac{n+3}{2}\,i}(t) = h_{\frac{n-1}{2}}(t), \quad i = \overline{1, \frac{n-3}{2}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&h_{i\,i+n-1}(t) = h_{i+n-1\,i}(t) = h_2(t), \quad i = 1, \\
&h_1(t) = e^{-\kappa t}1(t) + g_1(t),\ h_i(t) = g_i(t), \quad i = \overline{2, \frac{n+1}{2}},
\end{aligned}$$

$$g_i(t) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{L} a_i(l)\ \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t-l\tau)^l}{l!} e^{-\kappa(t-l\tau)} 1(t-l\tau),$$

$$i = \overline{1, \frac{n+1}{2}}, \ 0 < t < (L+1)\tau,$$

$1(t)$ – vienetinė funkcija, $a_i(l)$ $(i = \overline{1, \frac{n+1}{2}})$ – žr. (19) išraišką, $n = 2p + 1$ $(p \in N)$.

Remiantis gautomis išraiškomis, galima užrašyti tarpusavio sinchronizacijos sistemos, sudarytos iš n sujungtų į žiedą generatorių, pereinamųjų funkcijų matricą, kai n bet koks nelyginis skaičius.

Pavyzdžiui, kai $n = 3$, turėtume: $J = \text{diag}\ (\lambda_1 \lambda_1 \lambda_2) = \text{diag}\ (-1\ -1\ 2)$,

$$B^l = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$a_1(l) = 2^l + 2(-1)^l, \quad a_2(l) = 2^l - (-1)^l,$$

$$h(t) = (h_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$

$$h_1(t) = e^{-\lambda t} 1(t) + g_1(t), \quad h_2(t) = g_2(t),$$

$$g_i(t) = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{L} a_i(l) \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t - l\tau)^l}{l!} e^{-\kappa(t - l\tau)} 1(t - l\tau),$$

$$i = 1, 2; \quad 0 < t < (L+1)\tau.$$

Kai $n = 5$, gautume: $J = \text{diag}\ (\lambda_1 \lambda_1 \lambda_3 \lambda_3 \lambda_5) = \text{diag}\ (-a\ -a\ b\ b\ 2)$,

$$a = 2\cos\frac{\pi}{5}, \quad b = 2\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$B^l = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$a_1(l) = 2^l + 2b^l + 2(-a)^l,$$
$$a_2(l) = 2^l + b^l b + (-a)^l(-a),$$
$$a_3(l) = 2^l + b^l(-a) + (-a)^l b,$$

$$h(t) = (h_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 & h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$

$$h_1(t) = e^{-\lambda t}1(t) + g_1(t)\,; \quad h_i(t) = g_i(t)\,,\ i = 2,\ 3;$$

$$g_i(t) = \frac{1}{5}\sum_{l=1}^{L} a_i(l)\ \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t - l\tau)^l}{l!} e^{-\kappa(t-l\tau)}1(t - l\tau),$$
$$i = \overline{1,3}; \quad 0 < t < (L+1)\tau.$$

Gautos tikslios pereinamųjų funkcijų išraiškos gali būti panaudotos sistemos dinamikai tirti, jos statistinėms charakteristikoms skaičiuoti, perdavimo funkcijoms ir dažninėms charakteristikoms rasti.

Literatūra

[1] W.C. Lindsey, J.H. Chen, Mutual clock synchronization in global digital communication networks, *Euro. Trans. Telecomun.*, 7(1), 25–37 (1996).
[2] J.Z. Rimas, Issledovanie dinamiki sistem vzaimnoj sinchronizacii, *Radiotechnika*, 32(2), 3–9 (1977).
[3] R. Horn, Ch. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge university press, Cambridge (1986).
[4] S. Paškovskij, *Vyčislitelnyje primenenija mnogočlenov i riadov Čebyševa*, Nauka, Moskva (1983).

Investigation of the mathematical model of the multidimensional automatic control system

J. Rimas

The mathematical model of the mutual synchronisation system composed of $n = 2p + 1$ ($p \in N$) joined into a ring oscillators is investigated. The precise analytical expressions of the elements of the step responses matrix of the system are obtained.