Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 471–474

Nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių k-ojo maksimumo ribinis skirstinys

Arvydas JOKIMAITIS (KTU)
el. paštas: aksoma@fmf.ktu.lt

Sakykime, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija

$$F_j(x) = P(X_j < x) \quad \forall j \geqslant 1.$$

Apibrėžkime atsitiktinį dydį

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Pažymėkime

$$m_n(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \big(1 - F_j(a_n + b_n x)\big),$$
$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \big(1 - F_j(a_n + b_n x)\big),$$

čia $\{a_n\}$ ir $\{b_n > 0\}$ – centravimo ir normavimo konstantų sekos.

Suformuluosime gerai žinomą rezultatą (žiūr. [2]).

1 teorema. *Tarkime, tenkinama sąlyga*

$$\lim_{n \to \infty} m_n(x) = 0 \quad \forall x. \tag{1}$$

Tam, kad

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \tag{2}$$

kiekviename funkcijos $H(x)$ tolydumo taške (čia $H(x)$ – neišsigimusi skirstinio funkcija) būtina ir pakankama, kad egzistuotų riba

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x) > 0. \tag{3}$$

Be to

$$H(x) = \mathrm{e}^{-u(x)}.$$

Sudarykime n pirmųjų atsitiktinių dydžių sekos $\{X_n\}$ narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \leqslant X_{2:n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n:n}.$$

Kai $k > 1$ yra fiksuotas sveikas teigiamas skaičius, o $n \to \infty$, atsitiktinį dydį $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k-uoju maksimumu.

Šiame darbe rasime tiesiškai normuoto k-ojo maksimumo ribinį skirstinį. Pažymėsime, kad vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių k-ųjų ekstremaliųjų reikšmių ribiniai skirstiniai yra nagrinėti visoje eilėje darbų (žr. [1], [3] ir kt.).

Suformuluosime pagrindinį rezultatą.

2 teorema. *Tarkime, tenkinamos* (1) *ir* (2) *lygybės. Visiems* x, *tokiems, kad* $0 < H(x) < 1$, *teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) = H_{(k)}(x).$$

Čia

$$H_{(k)}(x) = H(x) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(u(x))^i}{i}.$$

Įrodymas. Pažymėkime $a_n + b_n x = x_n$. Turime

$$P(X_{n-k+1:n} < x_n) = \sum_{i=0}^{k-1} P(A_i), \tag{4}$$

čia $A_i = \{$tarp $X_1, \ldots, X_n$ yra lygiai i atsitiktinių dydžių, nemažesnių už $x_n\}$.

Turime

$$P(A_0) = P(Z_n < x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_j(x_n).$$

Atsižvelgę į teoremos sąlygas, gauname

$$\lim_{n\to\infty} P(A_0) = H(x) = \mathrm{e}^{-u(x)}. \tag{5}$$

Toliau turime

$$P(A_1) = \sum_{i_1=1}^{n} (1 - F_{i_1}(x_n)) \prod_{j:j\neq i_1}^{n} F_j(x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_j(x_n) \sum_{i_1=1}^{n} \frac{(1 - F_{i_1}(x_n))}{F_{i_1}(x_n)}.$$

Kadangi tenkinama (1) sąlyga, tai

$$\lim_{n\to\infty} F_{i_1}(x_n) = 1, \quad i_1 = 1, 2, \ldots$$

Atsižvelgę į teoremos sąlygas, o taip pat į (3) lygybę, iš čia gauname

$$\lim_{n\to\infty} P(A_1) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} F_j(x_n) \sum_{i_1=1}^{n} \left(1 - F_{i_1}(x_n)\right) = H(x)u(x). \tag{6}$$

Toliau turime

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \sum_{i_1,i_2:i_1\neq i_2}^{n} \left(1 - F_{i_1}(x_n)\right)\left(1 - F_{i_2}(x_n)\right) \prod_{j:j\neq i_1,i_2}^{n} F_j(x_n) \\ &= \prod_{j=1}^{n} F_j(x_n) \sum_{i_1,i_2:i_1\neq i_2}^{n} \frac{\left(1 - F_{i_1}(x_n)\right)\left(1 - F_{i_2}(x_n)\right)}{F_{i_1}(x_n)F_{i_2}(x_n)}. \end{aligned}$$

Atsižvelgę į (1) sąlygą, gauname

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(A_2) &= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} F_j(x_n) \sum_{i_1,i_2:i_1\neq i_2}^{n} \left(1 - F_{i_1}(x_n)\right)\left(1 - F_{i_2}(x_n)\right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} F_j(x_n) \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} \left(1 - F_j(x_n)\right) \right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \left(1 - F_j(x_n)\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Atsižvelgę į (1) ir (3) sąlygas, turime

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(1 - F_j(x_n)\right)^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} m_n(x)u_n(x) = 0$$

visiems x tokiems, kad $u(x) < \infty$. Iš čia, atsižvelgę į teoremos sąlygas, gauname

$$\lim_{n\to\infty} P(A_2) = H(x)\frac{\left(u(x)\right)^2}{2}. \tag{7}$$

Galiausiai analogiškai parodome, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(A_{k-1}) = H(x)\frac{\left(u(x)\right)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{8}$$

Atsižvelgę į (4) ir (5)–(8) lygybes, gauname

$$P(X_{n-k+1:n} < x_n) = H(x)\left(1 + u(x) + \frac{\left(u(x)\right)^2}{2} + \ldots + \frac{\left(u(x)\right)^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Tarkime,

$$F_j(x) = 1 - \frac{\lambda_j}{x}, \quad x > \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Parenkame centravimo ir normavimo konstantas

$$a_n = 0, \quad b_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Jei parametrai $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ yra tokie, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} = 0,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = 0, \quad \forall x > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Taikydami 1 teoremą gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < b_n x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

Taikydami 2 teoremą, gauname k-ojo maksimumo ribinį skirstinį

$$H_{(k)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!x^i}, \quad x > 0.$$

Literatūra

[1] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley, New York (1978).
[2] E. Pancheva, Limit theorems for extreme order statistics under nonlinear normalization, *Lecture Notes Math.*, **1155**, 284–309 (1985).
[3] R. -D. Reiss, *Approximate Distributions of Order Statistics*, Springer, New York (1989).

Limit distribution for the k-th maxima of nonindentically distributed random variables

A. Jokimaitis

In this paper the limit distribution for k th maxima of independent nonidentically distributed random variables is obtained.