LMD mokslo darbai, III tomas, 86–92

Lokalieji multiplikatyviųjų funkcijų skirstiniai

Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: algebra@vpu.lt

1995 m. E. Manstavičiaus iniciatyva Lietuvoje buvo pradėti tyrimai, kurių objektu tapo aritmetinės funkcijos, apibrėžtos kitokiame nei natūraliųjų skaičių, vadinamajame „aritmetiniame" pusgrupyje G. Šios tematikos pradininku laikytinas Pietų Afrikos matematikas J. Knopfmacheris, savo [1] monografijoje apibrėžęs specialias („aritmetines") pusgrupes G ir suformulavęs keletą klausimų–problemų (*Open Questions*), kurias spręsti paragino atitinkamų sričių specialistus. Tie *klausimai-problemos* ir paskatino naują tikimybinės skaičių teorijos tyrinėjimų ir rezultatų bangą. Susidomėjęs šia tematika, šio straipsnio autorius irgi gavo keletą rezultatų (žr., pvz., [6], [7], [8]), parodžiusių, kad klasikinės tikimybinės skaičių teorijos faktai pusgrupėje G yra netrivialiai interpretuojami. Atskiru atveju, įrodinėjant ribines *lokaliąsias* teoremas, be kita ko, išryškėja ir kai kurie originalūs, natūraliųjų skaičių pusgrupei nebūdingi aspektai.

Šiame straipsnyje autorius tęsia aritmetinių *multiplikatyviųjų* funkcijų, apibrėžtų pusgrupėje G lokaliųjų ribinių skirstinių tyrimus: praplečiant straipsnyje [8] gautos ribinės teoremos multiplikatyviosioms funkcijoms galiojimo zoną, čia gautas pagrindinio nario asimptotinis skleidinys bei liekamojo nario įvertis.

Pagal apibrėžimą, *aritmetinė pusgrupė* G yra laisvoji komutatyvi pusgrupė (su vienetiniu elementu 1), kurią generuoja skaiti pirminių elementų p aibė P. Aibėje G yra apibrėžta pilnai adityvi *laipsnio funkcija* $\delta : G \to N \cup \{0\}$ tokia, kad, su kiekvienu $p \in P$, $\delta(p) \geqslant 1$ ir, be to, galioja tokia *aksioma*.

Aksioma. *Egzistuoja tokios konstantos* $A > 0$, $q > 1$ *ir* $0 \leqslant \nu < 1$, *kad*

$$G(n) := \#\{a \in \mathbf{G}; \delta(a) = n\} = Aq^n + O(q^{\nu n}).$$

Apibrėžus Riemman'o dzeta funkcijos analogą, buvo įrodytas asimptotinis pirminių pusprupės G elementų pasiskirstymo dėsnis. E. Manstavičius, kartu su bendraautoriais (žr. [2]) pastebėjo, kad šiuo atveju

$$\pi(k) := \#\{p \in \mathbf{G}; \delta(p) = k\} = \frac{q^k}{k}(1 - I(G)(-1)^k) + O(q^{c_0 k}).$$

Čia $\max\{1/2, \nu\} < c_0 < 1$, o simboliu $I(G)$ pažymėtas išskirtinio nulio indikatorius.

Apibrėšime tiriamųjų multiplikatyviųjų funkcijų klasę $M(G)$ ir priminsime svarbiausius iš [8] straipsnyje įvestų žymenų.

Apibrėžimas. *Sakysime, kad multiplikatyvioji funkcija* $g : G \longrightarrow R$ *priklauso klasei* $M(G)$, *jei su visais galimais* $v \in R$ *yra tenkinamos sąlygos*

$$\sum_{\substack{p\in P,\delta(p)=l\\ g(p)=\nu}} 1 = \pi(l)\big(\lambda_\nu + \varrho_\nu(l)\big), \qquad \nu \in R, l \geqslant 1. \tag{1}$$

Čia $\lambda_\nu \in [0,1]$ *– konstantos, o* $\varrho_\nu(l)$ *– liekamieji nariai. Be to,* $\varrho_\nu(l) := C_\nu(l)l^{-\alpha}$ *su konstanta* $\alpha > 0$ *ir (tolygiai su visais* $l \geqslant 1$*)*

$$\sum_\nu |C_\nu(l)| < \infty.$$

Toliau visur: $k = 0, 1$; $\lambda := \sqrt{\log n}$;

$$\chi_k := \chi_k(t) = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu |\nu|^{it}\mathrm{sgn}^k\nu; \quad E_{kj} := \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu \log^j|\nu|;$$

$$\gamma_k = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu; \quad \sigma_k^2 = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu \log^2|\nu|;$$

$$y_k = \frac{\log|m| - E_{k1}\lambda^2}{\lambda}; \quad \eta_k(t) = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \mathrm{sgn}^k\nu \cos(t\log|\nu|);$$

$$A_1 := \frac{1}{A}\prod_{p\in P}\left(1 - \frac{1}{\|p\|}\right)^{-1}\left(1 - \frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\right)^{-1}.$$

Skaičiai t_0 ir τ_0 yra lygčių $\eta_0(t) = \gamma_0$ ir $\eta_1(\tau) = -\gamma_1$ sprendiniai iš intervalo $(-\pi, \pi]$.

Darbe [8] yra įrodyta lokalioji ribinė teorema klasės $M(G)$ multiplikatyviosioms funkcijoms. Į pagrindinio nario išraišką įeinanti standartinio normaliojo skirstinio tankio funkcija φ, kaip ir adityviųjų funkcijų atveju [4], labai apriboja teoremos galiojimo zoną, nors, kaip matysime, atitinkamų Mellin'o charakteristinių transformacijų įverčiai leidžia gauti ir žymiai tikslesnę teoremą, atitinkančią autoriaus [5] darbe gautus rezultatus. Suformuluosime ją.

Teorema. *Tarkime,* $g \in M(G)$, $\sigma_0^2 > 0$ *ir* $\ln|g(a)|$ *su visais* $a \in G$ *tokiais, kad* $g(a) \neq 0$, *įgyja tik sveikąsias reikšmes. Tarkime, be to, kad egzistuoja* $r \in N$, *su kuriuo eilutės*

$$\sum_{\nu,\nu\neq 0} \big|\log|\nu|\big|^{r+2}\lambda_\nu, \qquad \sum_{p,j\geqslant 2, g(p^j)\neq 0} \big|\log|g(p^j)|\big|^r q^{-j\delta(p)},$$

$$\sum_{\nu,\nu\neq 0} \big|\log|\nu|\big|^r |C_\nu(l)| \tag{2}$$

konverguoja (pastaroji tolygiai su visais $l \geqslant 1$*). Tada su kiekvienu* $m \neq 0$, *kai* $n \longrightarrow \infty$, *yra teisinga asimptotinė formulė*

$$\nu_n(m) : = \frac{1}{Aq^n}\#\{a \in G; \delta(a) = n, g(a) = m\}$$

$$= \mathrm{O}(n^{-\alpha}\log n) + \sum_{k=0}^{1} \frac{\mathrm{sgn}^k m}{2n^{1-\gamma_0}} \Bigg(\sum_{t_0} \mathrm{e}^{-it_0 \log|m|} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{P_{kj}(-\varphi, t_0)}{(\sigma_0\lambda)^{j+1}}$$
$$+ (-1)^n I(G) A A_1 \sum_{\tau_0} \mathrm{e}^{-i\tau_0 \log|m|} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{Q_{kj}(-\varphi, \tau_0)}{(\sigma_0\lambda)^{j+1}} + O\Big(\frac{1}{\lambda^{r+1}}\Big)\Bigg).$$

Čia $P_{kj}(u, t_0)$ ir $Q_{kj}(u, \tau_0)$ yra tam tikri polinomai nuo u, kurių laipsnis neviršija $3j$, o koeficientai priklauso tik nuo funkcijos g ir skaičių t_0, τ_0. $P_{kj}(-\varphi, t_0)$ ir $Q_{kj}(-\varphi, \tau_0)$ gaunami iš $P_{kj}(u, t_0)$ ir $Q_{kj}(u, \tau_0)$ pakeičiant laipsnius u^l dydžiais $\varphi^{(l)}(-\frac{y_0}{\sigma_0})$.

Įrodymas. Kaip ir [4], [6], [7], [8] straipsniuose, įrodymas grindžiamas [3] darbe įrodyta teorema apie multiplikatyviųjų funkcijų, apibrėžtų pusgrupėje G, reikšmių sumavimą. Jei multiplikatyvioji funkcija $g(a) \in M(G)$, tai funkcijos $f_k(a, t) := |g(a)|^{it}\mathrm{sgn}^k g(a)$ irgi yra multiplikatyvios ir tenkina 1 teoremos iš [3] sąlygas, todėl:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Aq^n} \sum_{\delta(a)=n} f_k(a,t) &= \frac{(An)^{\chi_k - 1}}{\Gamma(\chi_k)} \prod_{p\in P} \Big(1 - \frac{1}{\|p\|}\Big)^{\chi_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_k(p^j, t)}{\|p\|^j} \\
&\quad + I(G) \frac{(-1)^n A_1^{\chi_k} n^{-\chi_k - 1}}{A\Gamma(-\chi_k)} \prod_{p\in P} \Big(1 - \frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\Big)^{\chi_k} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j\delta(p)} f_k(p^j, t)}{\|p\|^j} + \mathrm{O}(n^{-\alpha}\log n) \\
&:= \frac{(An)^{\chi_k - 1}}{\Gamma(\chi_k)} h_{k1}(t) + I(G) \frac{(-1)^n A_1^{\chi_k} n^{-\chi_k - 1}}{A\Gamma(-\chi_k)} h_{k2}(t) \\
&\quad + \mathrm{O}(n^{-\alpha}\log n)
\end{aligned} \tag{3}$$

Tolesni žingsniai remiasi (3) formule, tapatybe

$$\nu_n(m) = \frac{1}{4\pi A q^n} \sum_k \mathrm{sgn}^k m \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{it\log|m|} \sum_{\delta(a)=n} f_k(a,t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

bei [5], [6] ir [8] darbų idėjomis. Suskaidę intervalą $(-\pi, \pi]$ į dalinius intervalus pagal lygčių $\eta_0(t) = \gamma_0$ ir $\eta_1(\tau) = -\gamma_1$ sprendinius t_0 ir τ_0 ir atlikę kintamųjų pakeitimus $t \to t + t_0$, $\tau \to \tau_0$, iš (3) ir (4) gausime:

$$\nu_n(m) = \sum_k \mathrm{sgn}^k m J_{kj} + \mathrm{O}(n^{-\alpha}\log n), \quad j = 1, 2. \tag{5}$$

Čia

$$J_{k1} := \sum_{t_0} J_{k1}(t_0); \qquad J_{k2} := \sum_{\tau_0} J_{k2}(\tau_0);$$

$$J_{k1}(t_0) = \frac{e^{-it_0 \log|m|}}{4\pi n^{\lambda_0}} \int\limits_{D_0(0)} L_{k1}(t+t_0)\exp\left\{\lambda^2\mu_{k1}(t) - ity_k\lambda\right\} dt;$$

$$J_{k2}(\tau_0) = I(G)\frac{(-1)^n e^{-i\tau_0 \log|m|}}{4\pi A n^{\lambda_0}} \int\limits_{D_1(0)} L_{k2}(\tau+\tau_0)\exp\{\lambda^2\mu_{k1}(\tau) - i\tau y_k\lambda\} d\tau.$$

Simboliais $D_k(0)$, $k = 0, 1$ žymime nulio taško aplinkas, į kurias transformuojasi taškų t_0 ir τ_0 generuoti atitinkami intervalai. Kiti žymenys irgi įprasti:

$$L_{k1}(t) := \frac{(An)^{\chi_k(t)-1}}{\Gamma(\chi_k(t))} h_{k1}(t), \qquad L_{k2}(\tau) := \frac{(An)^{\chi_k(\tau)}}{\Gamma(-\chi_k(\tau))} h_{k2}(\tau),$$
$$\mu_{k1} := \chi_k(u) - \gamma_0 - itE_{k1}, \qquad \mu_{k2} := -\chi_k(u) - \gamma_0 - itE_{k1}.$$

Be to, pastarosiose integralų J_{k1} ir J_{k2} išraiškose atsižvelgta į tai, kad

$$\lambda^2\mu_{k1}(t+t_0) - i(t+t_0)y_k\lambda = \lambda^2\mu_{k1}(t) - ity_k\lambda - it_0 \ln|m|,$$
$$\lambda^2\mu_{k2}(\tau+\tau_0) - i(\tau+\tau_0)y_k\lambda = \lambda^2\mu_{k1}(\tau) - i\tau y_k\lambda - i\tau_0 \ln|m|.$$

Pastebėsime, kad iš funkcijų $\eta_k(u)$ tolydumo ir taškų t_0, τ_0 izoliuotumo išplaukia: kai $\eta_1(t_0) \neq \gamma_0$ arba $\eta_1(\tau_0) \neq -\gamma_0$, tai atitinkamoje aplinkoje $D_k(0)$

$$\sup_{u \in D_k(0)} \eta_1(u) = -\gamma_2 < 0, \tag{6}$$

nes tokiu atveju egzistuoja bent viena reikšmė v tokia, kad, kai $u = t_0$ ar $u = \tau_0$, tai $\lambda_\nu > 0$ ir $\cos(u \ln|\nu|)\operatorname{sgn}\nu < 1$.

Savybė (6) leidžia gauti įverčius

$$J_{11} = O(n^{-\gamma_2-\gamma_0}) \quad \text{ir} \quad J_{12} = O(n^{-\gamma_2-\gamma_0}). \tag{7}$$

Kita vertus, pakankamai mažiems u ($|u| \leqslant c$), iš skleidinio

$$\exp\{\lambda^2\mu_{k1}(u)\} = \exp\left\{\lambda^2\left(\gamma_k - \gamma_0 - \frac{u^2\sigma_k^2}{2} + O(|u|^3)\right)\right\},$$

išplaukia, kad atveju $\gamma_1 < \gamma_0$ irgi galioja įvertis (7) su $\gamma_2 = -(\gamma_0 - \gamma_1)$.

Pagaliau, kai $t \in D_k(0)$, bet $|t| \geqslant c$, tai (5) formulėje integralų $J_{k1}(t_0)$ ir $J_{k2}(\tau_0)$ dalis irgi įvertiname trivialiai, kadangi tolydinė uždarame intervale funkcija $\eta_1(t) - \gamma_0$ įgyja jame savo maksimalią (neigiamą) reikšmę.

Todėl toliau netrivialiu laikysime tik atvejį $\gamma_1 = \gamma_0$. Tada savo ruožtu

$$\chi_1(u) = \chi_0(u), \quad E_{11} = E_{01}, \quad y_1 = y_0, \quad \sigma_1 = \sigma_0.$$

Tad tolesniam integralų skaičiavimui intervalus $D_k(0)$ suskirstysime į tris nepersikertančius poaibius: $I_k(\varepsilon) := \{u \,|\, |u| < \varepsilon\}$, $I_k(\varepsilon, c) := \{u \,|\, \varepsilon \leqslant |u| < c\}$ ir $I_k(c) := D_k(0) \setminus \big(I_k(\varepsilon) \cup I_k(\varepsilon, c)\big)$. Kai $u \in I_k(0)$, tai, kaip minėta, integralus įvertiname trivialiai. Jei c – pakankamai maža fiksuota konstanta, tai integralus galime užrašyti pavidalu

$$\begin{aligned} J_{k1}(t_0) : &= \frac{\mathrm{e}^{-it_0 \log |m|}}{4\pi n^{\lambda_0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} L_{k1}(t + t_0) \exp\left\{\lambda^2 \mu_{k1}(t) - ity_k\lambda\right\} \mathrm{d}t \\ &+ \mathrm{O}(\lambda^{-r-1}), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} J_{k2}(\tau_0) : &= I(G) \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-i\tau_0 \log |m|}}{4\pi A n^{\lambda_0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} L_{k2}(\tau + \tau_0) \exp\left\{\lambda^2 \mu_{k1}(\tau) - i\tau y_k \lambda\right\} \mathrm{d}\tau \\ &+ \mathrm{O}(\lambda^{-r-1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Iš tikrųjų, kadangi $\sigma_0^2 > 0$, o $u \in I(\varepsilon, c)$, tai, pasinaudoję (2) sąlyga, turime

$$\exp\left\{\mu_{k1}(iu)\lambda^2\right\} = \exp\left\{\left(-\frac{u^2}{2}\sigma_0^2 + \mathrm{O}(|u|^3)\right)\lambda^2\right\} = \mathrm{O}\big(\exp\{-\gamma_3 u^2 \lambda^2\}\big) \tag{10}$$

su teigiama konstanta $\gamma_3 := \gamma_3(c) > 0$, kai tik $|u| < c := \frac{\sigma_0^2}{2|E_{k3}|}$. Todėl iš (10) įverčio, kai $|u| \geqslant \varepsilon$, parinkę $\varepsilon := \sqrt{\frac{r+1}{\gamma_3}}\lambda^{-1}\sqrt{\log \lambda}$ ir gauname (8), (9), kadangi funkcijos $L_{k1}(t + t_0)$ ir $L_{k1}(\tau + \tau_0)$ yra tolygiai aprėžtos.

Tolesni skaičiavimai yra analogiški tiems, kurie atlikti [5], [6], [8] straipsniuose. Išnaudodami gama funkcijos analizines savybes, klasės $M(G)$ apibrėžimą bei sąlygą (2), pakankamai mažoje nulio aplinkoje $I_\varepsilon(0) := \{u \in R \,|\, |u| < \varepsilon\}$ galime gauti pointegralinių funkcijų asimptotinius skleidinius (it) ar $(i\tau)$ laipsniais. Iš tikrųjų pirmiausia iš (2) sąlygos išplaukia, kad su visais $u \in D_\varepsilon$.

$$\chi_k(u) = \sum_{j=0}^{r+1} \chi_{kj}(iu)^j + \mathrm{O}(|u|^{r+2}).$$

Todėl

$$\log \Gamma(\chi_1(u)) = \sum_{j=0}^{r-1} \gamma_j(iu)^j + \mathrm{O}(|u|^r).$$

Panaudoję (2), kaip ir [5], [6] darbuose, gauname funkcijų $\log L_{k1}(t + t_0)$ bei $\log L_{k2}(\tau + \tau_0)$ skleidinius (žr. [6], 1 lemą):

$$\log L_{k1}(t + t_0) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{k1,j}(t_0)(it)^j + \mathrm{O}(|t|^r),$$

$$\log L_{k2}(\tau+\tau_0)=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_{k2,j}(\tau_0)(i\tau)^j+\mathrm{O}(|\tau|^r).$$

Dabar pažymėję

$$\Phi_{kj}(iu):=\lambda^2\mu_{k1}\Big(\frac{iu}{\lambda}\Big)+\frac{(u\sigma_0)^2}{2}+\log L_{kj}\Big(\frac{u}{\lambda}+u_0\Big),$$

standartiniu būdu gauname, kad

$$\exp\{\Phi_{k1}(it)\}=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{P_{kj}(it,t_0)}{(\sigma_0\lambda)^j}\mathrm{O}\Big(\frac{|t|^r}{\lambda^r}(1+t^2)^r\exp\Big\{\frac{(t\sigma_0)^2}{4}\Big\}\Big),$$

$$\exp\{\Phi_{k2}(i\tau)\}=\sum_{j=0}^{r-1}\frac{Q_{kj}(i\tau,\tau_0)}{(\sigma_0\lambda)^j}\mathrm{O}\Big(\frac{|\tau|^r}{\lambda^r}(1+\tau^2)^r\exp\Big\{\frac{(\tau\sigma_0)^2}{4}\Big\}\Big),$$

kai atitinkamai $t\in I_k(\varepsilon)$ arba $\tau\in I_k(\varepsilon)$. Polinomai P_{kj} ir Q_{kj}, $j=0,1,2,\ldots,r-1$, apibrėžiami kaip koeficientai prie $(\frac{x}{\lambda})^j$ funkcijų

$$\exp\{U_{kj}(x)\};\quad U(x):=\sum_{s=1}^{r-1}\frac{E_{ks}}{(s+2)!}\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)^s(iu)^{s+2}$$
$$+\sum_{s=0}^{r-1}\beta_{ks}\Big(\frac{iux}{\lambda}\Big)^s+\mathrm{O}\Big(\Big|\frac{ux}{\lambda}\Big|^r\Big)$$

skleidiniuose x laipsniais. Pasinaudoję formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(iu)^j\exp\Big\{-\frac{1}{2}u^2-iu\frac{y_0}{\sigma_0}\Big\}\,du=\varphi^{(j)}\Big(-\frac{y_0}{\sigma_0}\Big)$$

ir standartiniais įverčiais, užbaigiame teoremos įrodymą.

Atskiru atveju

$$\sum_{t_0}e^{it_0m}P_{k0}(-\varphi,t_0)+(-1)^nI(G)q\big(AZ'(-q^{-1})\big)\sum_{\tau_0}e^{-i\tau_0m}Q_{k0}(-\varphi,\tau)$$
$$=\varphi\Big(\frac{y_0}{\sigma_0}\Big)H_k(k,G).$$

Čia:

$$H_k(g,G):=A^{-\lambda_0}H_1(f_k)+(-1)^n\frac{I(G)}{A}A_1^{-\gamma_0}H_2(f_k);$$

$$H_1(f_k)=\frac{1}{\Gamma(\gamma_0)}\sum_{t_0}e^{-it_0\ln|m|}\prod_{p\in P}\Big(1-\frac{1}{\|p\|}\Big)^{\gamma_0}\sum_{j\geqslant 0,g(p^j)\neq 0}\frac{f_k(p^j,t_0)}{\|p\|^j},$$

$$H_2(f_k) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_0)} \sum_{\tau_0} \mathrm{e}^{-i\tau_0 \ln |m|} \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\right)^{\gamma_0}$$
$$\times \sum_{j \geqslant 0, g(p^j) \neq 0} \frac{(-1)^{j\delta(p)} f_k(p^j, \tau_0)}{\|p\|^j}.$$

Literatūra

[1] J. Knopfmacher, Analytic Arithmetic of Algebraic Function Fields, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, **50**, Dekker (1979).

[2] K.-H. Indlekofer, E. Manstavičius, R. Warlimont, On a certain class of infinite products with an application to arithmetical semigroups, *Archiv der Math.*, **56**, 446–453 (1991).

[3] E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, Summation of the values of multiplicative functions on semigroups, *Lithuanian J. Math.*, **33**(3), 330–340 (1993) (Russian).

[4] E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, Local distributions of additive functions on arithmetical semigroups, *Preprint 95-11*, Vilnius University, Fac. of Mathematics (1995).

[5] R. Skrabutėnas, On the distributions of values of multiplicative functions, *Lithuanian J. Math.*, **18**(2), 129–139 (1978) (Russian).

[6] R. Skrabutėnas, Asymtotical expansions in the local limit theorem, *LMD XXXVIII konferencijos darbai*, Technika, Vilnius, 39–45 (1997).

[7] R. Skrabutėnas, Local distributions of arithmetic functions on semigroups, in: *New Trends in Probability and Statistics*, TEV, Vilnius (VSP, Utrecht) (1997), pp. 363–370.

[8] R. Skrabutėnas, Local limit theorems for multiplicative functions on semigroups, *LMD mokslo darbai*, II tomas, Technika, Vilnius, 61–68 (1998).

Local distributions of multiplicative functions

R. Skrabutėnas

In the present paper the local distribution laws of values of multiplicative arithmetic functions $g : G \to R$ defined on arithmetical semigroups G and belonging to the class $M(G)$ is considered. An asymptotical expansion for the main term in local limit theorem is obtained.