LMD mokslo darbai, III tomas, 132–135

α-normalusis skirstinys

Vaidotas KANIŠAUSKAS (ŠU)
el. paštas: vaidotas@cr.su.lt

Nors normalusis tikimybinis skirstinys yra gana universalus, tačiau praktikoje dažnai būna per siauras. Norint praplėsti normaliųjų skirstinių klasę, neprarandant gerųjų jų savybių, natūralu įvesti α-normalųjį skirstinį.

1 apibrėžimas. Sakysime, kad atsitiktinis dydis ζ turi α-normalųjį skirstinį su parametrais (a, σ, α), kur $a \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma > 0$, $\alpha \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ (žymėsime $\zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$), jei jo pasiskirstymo funkcija turi pavidalą

$$F(a, \sigma, \alpha; t) = \frac{1}{2\sigma\Gamma(1\frac{1}{\alpha})\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha\sigma^{\alpha}}\right\} dx, \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty),$$

kur $\Gamma(x)$ – gama funkcija.

Skirstinį $N(0, 1, \alpha)$ vadinsime α-standartiniu. Jeigu $\zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$, tai $\frac{\zeta - a}{\sigma}$ $\sim N(0, 1, \alpha)$. Todėl tikslinga įvesti α-standartinio skirstinio pasiskirstymo funkciją:

$$\Phi(\alpha, t) = \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1\frac{1}{\alpha})} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right\} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

su tankiu

$$p(\alpha, t) = \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1\frac{1}{\alpha})} \exp\left\{-\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right\}.$$

Dabar naudinga taikyti formulę

$$F(a, \sigma, \alpha) = \Phi\left(\alpha, \frac{t-a}{\sigma}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Skirstinio $N(a, \sigma, \alpha)$ pradiniai ir centriniai momentai apskaičiuojami pagal formules:

$$\mathbf{M}\zeta^k = \begin{cases} a, & k = 1, \\ \sigma^2\alpha^{\frac{2}{\alpha}} \dfrac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} + a^2, & k = 2, \\ 3\sigma^2\alpha^{\frac{2}{\alpha}} a \dfrac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} + a^3, & k = 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{M}(\zeta - M\zeta)^k = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad k = 2l-1, \; l \in \mathbb{N}, \\ \sigma^{2l}\alpha^{\frac{2l}{\alpha}} \dfrac{\Gamma(\frac{2l+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}, & \text{kai} \quad k = 2l, \; l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Taigi $\zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$ vidurkis yra $\mathbf{M}\zeta = a$, o dispersija $\mathbf{D}\zeta = \sigma^2\alpha^{\frac{2}{\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}$.

Elementariai skaičiuojant nesunku įsitikinti, kad $\zeta \sim N(0,1,\alpha)$ charakteristinė funkcija $f(t) = \mathbf{M}e^{it\zeta}$ tenkina diferencialinę lygtį su pradinėmis sąlygomis:

$$\begin{cases} t = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{f^{(\alpha-1)}(t)}{f(t)}, \\ f^{(2k)}(0) = (-1)^k \dfrac{\Gamma(\frac{2k+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}, & k = 0, 1, \ldots, \dfrac{\alpha}{2}, \\ f^{(2k-1)}(0) = 0, & k = 1, 2, \ldots, \dfrac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

kur $f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$, ir gali būti išreikšta begaline eilute:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \alpha^{\frac{2n}{\alpha}}.$$

Lema. *Tegu $p(\alpha, t)$ yra $N(0,1,\alpha)$ tankio funkcija. Tada*

$$\lim_{\alpha \to \infty} p(\alpha, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \textit{kai} \quad t \in [-1, 1], \\ 0, & \textit{kai} \quad t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Išvada. *Jei $p(a, \sigma, \alpha; t)$ yra $N(a, \sigma, \alpha)$ skirstinio tankio funkcija, tai*

$$\lim_{\alpha \to \infty} p(a, \sigma, \alpha; t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma}, & \text{kai} \quad t \in [a - \sigma, a + \sigma], \\ 0, & \text{kai} \quad t \notin [a - \sigma, a + \sigma]. \end{cases}$$

Lemos ir išvados rezultatas gaunamas tiesioginiu skaičiavimu. Aišku, kad $N(a, \sigma, \alpha)$ skirstinio parametras a yra tankio funkcijos grafiko simetrijos ašis, parametras σ valdo tankio kreivės aukštį, o parametras α – plotį ir kampuotumą.

Dabar iš α-normalaus skirstinio išvesime skirstinių klases, analogiškas log-normaliajam, χ^2, Stjudento ir Fišerio skirstiniams.

2 apibrėžimas. Sakysime, kad ζ turi α-log-normalųjį skirstinį su parametrais $\theta = (a, \sigma, \alpha)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\alpha \in \{2, 4, 6, \ldots\}$, jei $\ln\zeta \sim N(a, \sigma, \alpha)$. To skirstinio tankis yra

$$p(\theta, t) = \frac{1}{2\sigma\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1\frac{1}{\alpha})t} \exp\left\{-\frac{(\ln t - a)^\alpha}{\alpha\sigma^\alpha}\right\}, \quad t > 0,$$

o pasiskirstymo funkcija turi pavidalą

$$F(\theta, t) = \Phi\left(\alpha, \frac{\ln t - a}{\sigma}\right).$$

3 apibrėžimas. Tegu $X_1, X_2, ..., X_n$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kuriems $X_i \sim N(0,1,\alpha)$, $i = 1, ..., n$. Tada atsitiktinio dydžio

$$\chi_n^\alpha = X_1^\alpha + X_2^\alpha + ... + X_n^\alpha$$

tikimybinį skirstinį vadinsime χ^α skirstiniu su parametrais α ir n, kur $\alpha \in \{2,4,6,...\}$, $n \in \mathbb{N}$ (žymėsime $\chi_n^\alpha \sim C(\alpha, n)$). χ_n^α tankis yra

$$p_n(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{\alpha}} \Gamma(\frac{n}{\alpha})} x^{\frac{n}{\alpha}-1} e^{-\frac{x}{\alpha}}, \quad x > 0,$$

o charakteristinė funkcija

$$f_n(\alpha, t) = \frac{1}{(1 - \alpha i t)^{\frac{n}{\alpha}}}.$$

Nesunku matyti, kad $C(\alpha, n)$ yra gama skirstinys $G(\frac{1}{\alpha}, \frac{n}{\alpha})$.
Kada $\alpha = 2$, dydis χ^α turi χ^2 skirstinį su n laisvės laipsnių.

4 apibrėžimas. Tegu $Y, X_1, X_2, ..., X_n$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kuriems $Y, X_i \sim N(0,1,\alpha)$, $i = 1, ..., n$. Tada atsitiktinio dydžio

$$t_{n,\alpha} = \frac{Y}{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{n}\chi_n^\alpha}} = \frac{Y}{\left(\frac{1}{n}(X_1^\alpha + \ldots + X_n^\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

tikimybinį skirstinį vadinsime α-Stjudento skirstiniu su parametrais α ir n, kur $\alpha \in \{2,4,6,\ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$ (žymėsime $t_{n,\alpha} \sim S(\alpha, n)$). To skirstinio tankis

$$p_n(\alpha, x) = \frac{1}{2} \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)} \left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kada $\alpha = 2$, dydis $t_{n,2}$ turi Stjudento skirstinį su n laisvės laipsnių.

5 apibrėžimas. Tegu $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kuriems $X_i, Y_i \sim N(0,1,\alpha)$, $i = 1, \ldots, n$. Tada atsitiktinio dydžio

$$F_{m,n,\alpha} = \frac{\frac{1}{m}(X_1^\alpha + \ldots + X_m^\alpha)}{\frac{1}{n}(Y_1^\alpha + \ldots + Y_n^\alpha)} = \frac{\frac{1}{m}\chi_m^\alpha}{\frac{1}{n}\chi_n^\alpha}$$

tikimybinį skirstinį vadinsime α-Fišerio skirstiniu su parametrais α, m, n, kur $\alpha \in \{2, 4, 6, \ldots\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ (žymėsime $F_{m,n,\alpha} \sim F(\alpha, m, n)$). Jo tankis

$$p_{n,m}(\alpha, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{\alpha}\right) n^{\frac{n}{\alpha}} m^{\frac{m}{\alpha}} x^{\frac{m}{\alpha}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)(n+mx)^{\frac{m+n}{\alpha}}}, \quad x > 0.$$

Kada $\alpha = 2$, dydis $F_{m,n,2}$ turi Fišerio skirstinį su m ir n laisvės laipsnių.

Nesunku pastebėti, kad parametrų įvertinimo, parametrų pasikliautinųjų intervalų ieškojimo ir statistinių hipotezių tikrinimo teorijoje, kur panaudojamas normalusis skirstinys ir jo pagalba gauti kiti skirstiniai (žr. [1]), taikomi metodai nesunkiai apibendrinami panaudojant α-normalųjį ir kitus iš jo gaunamus skirstinius. Todėl čia apibrėžtos naujos tikimybinių skirstinių šeimos turėtų praplėsti statistinių metodų taikymo ribas.

Literatūra

[1] J. Kruopis, *Matematinė statistika*, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius (1993).

α-normal distribution

V. Kanišauskas

In this paper I introduce and consider the new class of distributions - natural widening of normal distribution.