LMD mokslo darbai, III tomas, 157–162

Netiesinio įmagnetinimo uždavinio sprendinio egzistencija

Pranas KATAUSKIS (VU)
el. paštas: pranas@ieva.maf.vu.lt

1. Įvadas ir pagrindiniai rezultatai

Kinetinės Landay–Lifšico lygtys dažnai taikomos magnetiniams reiškiniams aprašyti [1]. Skakauskas 1985 [2] pasiūlė naują dinaminę lygčių sistemą, aprašančią aplinkos, sudarytos iš viendomenių dalelių, įmagnetinimą. Šioje sistemoje vektorinė Landay–Lifšico lygtis charakterizuoja adatos formos magnetinės dalelės judėjimą magnetiniame lauke. Keletui paprastų šio uždavinio variantų Skakauskas rado tikslius sprendinius [3]. Atskirus atvejus nagrinėjo Skakauskas Helderio erdvėse [4] ir Katauskis Sobolevo erdvėse [5].

Šiame darbe sprendžiamas bendras uždavinys. Tiriamas sprendinio egzistavimas ir vienatis.

Nagrinėjamas kraštinis uždavinys lygčių sistemai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^1 u \times (u \times v + v), \tag{1}$$

$$u = u_0, \quad \text{kai} \quad t = 0, \tag{2}$$

$$v = a^2 u + a^3 w + a^4 \frac{\partial z}{\partial x}, \tag{3}$$

$$w = \int\limits_I a^5 u dy, \tag{4}$$

$$Lz = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{2} b_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + b_i w_i \right), \tag{5}$$

$$z = \varphi, \quad \text{kai} \quad x \in \partial\Omega, \tag{6}$$

čia L žymi elipsinį operatorių

$$Lz := \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + \alpha z.$$

Atskiros viendomenės dalelės judėjimą magnetiniame lauke aprašo Landay– Lifšico lygtis (1), vektorius u_0 apibrėžia pradinę dalelės padėtį. (4) lygtis charakterizuoja medžiagos įmagnetinimą. Dvi paskutinės lygtys nusako medžiagos įmagnetinimo ir išorinio magnetinio lauko sąveiką.

Naudojami tokie žymėjimai.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ yra aprėžta sritis su kontūru $\partial\Omega$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega \cup \partial\Omega$ taškas. y taškas iš baigtinio intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o $Q = \Omega \times I$. $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$, $w(t,x)$, $z(t,x)$ nežinomos funkcijos. Pažymėsime, kad $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ yra vektoriai, o z – skaliarinė funkcija. $a^1(t,x,y)$ – žinomas vektorius, $a^1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1)$, o $a^k(t,x,y)$, $k = \overline{2,5}$ žinomos matricos, būtent, $a^k = \{a_{ij}^k\}_{i,j=1}^3$, kai $k = 2,3,5$ ir $a^4 = \{a_{ij}^k\}_{i,j=1}^{3,2}$. Skaliarinės funkcijos $b_{ij}(t, x(x2))$, $b_i(t, x(x2))$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$ ir $\varphi(t,x)$, $\alpha(t,x)$, $\alpha_i(t,x)$, $\alpha_{ij}(t,x)$, $i,j = 1,2$ bei vektorius $u_0 = u(0,x,y)$ yra žinomi duomenys. Simbolis $\times$ žymi dviejų vektorių vektorinę sandaugą . Visos funkcijos realios.

Laikoma, kad egzistuoja tokia konstanta $\mu > 0$, jog

$$\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij}(t,x)\xi_i x i_j \geqslant \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

visiems $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ ir visiems $x \in \bar{\Omega}$, $0 < t \leqslant T$. Be to, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i,j = 1,2$.

Tegul $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, $l = 0,1,2,\ldots$, $0 < \alpha < 1$ Helderio erdvė su įprasta norma.

$C^{l+\alpha,0}(\bar{Q})$ – Banacho erdvė, kurioje norma apibrėžta taip pat kaip $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$. Skirtumas tik tas, kad išvestinių ir jų Helderio koeficientų maksimumas ieškomas srityje $\bar{Q}$, o ne srityje $\bar{\Omega}$.

$C^k(0,T;X)$ – Banacho erdvė, kurios elementai yra funkcijos, apibrėžtos ir tolydžiai diferencijuojamos t atžvilgiu iki k-tosios eilės imtinai $[0;T]$, su reikšmėmis Banacho erdvėje X.

Teorema. *Tegul* $\partial\Omega \subset C^{2+\alpha}$, $\varphi \in C(0,T;C^{2+\alpha}(\partial\Omega))$, $u_0 \in C^{1+\alpha,0}(\bar{Q})$. *Tarkime, kad* $a^k \in C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar{Q}))$, $k = \overline{1,5}$; α_{ij}, α_i, $\alpha \in C(0,T;C^{\alpha}(\bar{\Omega}))$, $i,j = 1,2$; b_{ij}, $b_i \in C(0,T;C^{\alpha}(\bar{\Omega}))$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$. *Jei* (5), (6) *uždavinys kiekvienam fiksuotam* $t \leqslant T$, *turi vienintelį sprendinį erdvėje* $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, *tai egzistuoja toks* $\widetilde{T} > 0$, *kad* (1)–(6) *uždavinys turi vienintelį sprendinį*

$$u \in C^1(0,\widetilde{T};C^{1+\alpha,0}(\bar{Q})), \quad v \in C(0,\widetilde{T};C^{1+\alpha,0}(\bar{Q})),$$
$$w \in C^1(0,\widetilde{T};C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})), \quad z \in C(0,\widetilde{T};C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})).$$

2. Pagalbiniai teiginiai

1 lemma. *Tarkime, kad žinomi duomenys tenkina teoremoje nurodytas sąlygas. Jei* $u \in C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar{Q}))$ *ir* (5), (6) *uždavinys kiekvienam fiksuotam* $0 \leqslant t < T$ *turi tik vieną sprendinį erdvėje* $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, *tai*

$$v \in C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar{Q})), \quad w \in C(0,T;C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})), \quad z \in C(0,T;C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})).$$

Be to, kiekvienam tokiam t teisingas įvertis

$$\|v(t)\|_Q^{(1+\alpha)},\quad \|w(t)\|_\Omega^{(1+\alpha)},\quad \|z(t)\|_\Omega^{(2+\alpha)} \leqslant C_1\|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)}. \tag{7}$$

Čia konstanta C_1 nepriklauso nuo u, v, w, z.

Įrodymas. Kadangi įrodymui reikalingi įverčiai gaunami nesunkiai, bet jų aprašymas užima daug vietos čia nurodoma tik įrodymo shema. Fiksuotam t įvertinę (5) dešinę pusę nustatome, kad ji yra erdvės $C^\alpha(\bar\Omega)$ elementas. (5), (6) uždaviniui taikydami Šauderio teoremą su lemoje minima sprendinio vienaties sąlyga, gauname z normos įvertį. Iš (3), (4) įvertiname v ir w. Kombinuodami gautas nelygybes, išvedame (7). Funkcijų v, w, z tolydumas t atžvilgiu išplaukia iš (7) ir u savybių.

2 lemma. *Jei $u_0 \in C^{1+\alpha,0}(\bar Q)$, $a^1 \in C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar Q))$, $v \in C(0,T;C^{\alpha,0}(\bar Q))$, tai $u \in C^1(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar Q))$ ir bet kuriam fiksuotam $0 < t \leqslant T$ teisinga nelygybė*

$$\|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)} \leqslant \|u_0\|_Q^{(1+\alpha)} + C_2\int_0^t \left(\|u(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)}\right)^2\left(1+\|u(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

Čia C_2 nepriklauso nuo u, v.

Įrodymas. Nagrinėjamas operatorius $A(u) = a^1u \times (u \times v + v)$ apibrėžtas erdvėje $C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar Q))$. Nesunku patikrinti, kad $A(u) \in C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar Q))$. Todėl (1), (2) uždavinys ekvivalentus integralinei lygčiai

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Vadinasi,

$$u \in C^1(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar Q)). \tag{9}$$

Iš (9) turime

$$\|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)} \leqslant \|u_0\|_Q^{(1+\alpha)} + \Big\|\int_0^t A(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_Q^{(1+\alpha)},$$

arba

$$\|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)} \leqslant \|u_0\|_Q^{(1+\alpha)} + 3\int_0^t \|A(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)}\mathrm{d}\tau.$$

Įvertinę po integralu esančią normą ir panaudoję (7), gauname (8).

3 lemma. *Tegul žinomos funkcijos tenkina teoremoje nurodytas sąlygas. Egzistuoja toks* $\widetilde{T}$, *kad visiems* $0 < t \leqslant \widetilde{T}$

$$\max_{t\in[0,\widetilde{T}]} \left\{ \|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)},\ \|v(t)\|_Q^{(1+\alpha)},\ \|w(t)\|_\Omega^{(1+\alpha)},\ \|z(t)\|_\Omega^{(2+\alpha)} \right\} \leqslant C_3. \tag{10}$$

Konstanta C_3 *nepriklauso nuo funkcijų* u, v, w, z.

Įrodymas. Tegul

$$\beta(t) = \|u_0\|_Q^{(1+\alpha)} + C_2 \int_0^t \left(\|u(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)}\right)^2 \left(1 + \|u(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)}\right) \mathrm{d}\tau.$$

Tada

$$\frac{d\beta}{dt} = C_2 \left(\|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)}\right)^2 \left(1 + \|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)}\right).$$

Iš (8) turime, kad

$$\|u(t)\|_Q^{(1+\alpha)} \leqslant \beta(t).$$

Todėl

$$\frac{d\beta}{dt} \leqslant C_2 \beta^2 (1 + \beta). \tag{11}$$

Be to,

$$\beta(0) = \|u_0\|_Q^{(1+\alpha)}. \tag{12}$$

Diferencialinio uždavinio

$$\frac{d\beta}{dt} = C_2 \beta^2 (1 + \beta),$$
$$\beta(0) = \|u_0\|_Q^{(1+\alpha)}$$

sprendinys yra didėjanti funkcija, tačiau visada galime rasti tokį $\widetilde{T} > 0$, kad $\beta(t)$ yra aprėžta $0 < t \leqslant \widetilde{T}$. Kadangi šis $\beta(t)$ mažoruoja (11),(12) sprendinį, tai lemoje minimas $\widetilde{T}$ surastas.

3. Teoremos įrodymas

Tegul

$$B(u(t)) = u_0 + \int\limits_0^t a^1 u(\tau) \times (u(\tau) \times v(\tau) + v(\tau))\mathrm{d}\tau$$

yra operatorius apibrėžtas $C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar{Q}))$, čia u yra funkcija apskaičiuojama pagal (3)–(6). Iš 2 lemos žinome, kad $B(u) \in C^1(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar{Q}))$. Įrodysime, kad B yra suspaudžiantysis operatorius.

Tegul u^1, u^2 yra du $C(0,T;C^{1+\alpha,0}(\bar{Q}))$ vektoriai, o v^1, v^2 atitinkami (3)–(6) sprendiniai. Tada

$$\begin{aligned} B(u^2) - B(u^1) &= \int\limits_0^t \Big\{a^1 u^2 \times (u^2 \times v^2 + v^2) - a^1 u^1 \times (u^1 \times v^1 + v^1)\Big\} d\tau \\ &= \int\limits_0^t \Big\{a^1 (u^2 - u^1) \times (u^2 \times v^2 + v^2) + a^1 u^1 \times ((u^2 - u^1) \times v^2 \\ &\quad + u^1 \times (v^2 - v^1) + v^2 - v^1)\Big\}\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Vertindami pointegralinį reiškinį, panašiai kaip įrodant 2 lemą, gauname nelygybę

$$\|B(u^2) - B(u^1)\|_Q^{(1+\alpha)} \leqslant \int\limits_0^t \Big\{C_4 \|u^2(\tau) - u^1(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)} + C_5 \|v^2(\tau) - v^1(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)}\Big\}\mathrm{d}\tau.$$

Kadangi $v^2 - v^1$ skirtumui galima taikyti (7), tai

$$\|B(u^2) - B(u^1)\|_Q^{(1+\alpha)} \leqslant C_6 \int\limits_0^t \|u^2(\tau) - u^1(\tau)\|_Q^{(1+\alpha)}\mathrm{d}\tau.$$

su C_5 nepriklausančia nuo u^1, u^2.

Kai $t < 1/C_5$, $B(u)$ yra suspaudžiantysis operatorius. Dabar teoremos teiginys išplaukia iš 1, 2 lemų.

Literatūra

[1] L. Landay, E. Lifschitz, On theory of magnetic permeability in feromagnetic bodies, *Phys. Zeitschr. Sowjetunion*, **8**, 183–189 (1935).
[2] V. Skakauskas, Kinetinės viendomenės aplinkos įmagnetinimo lygtys, *Liet. Matem. Rink.*, **25**(3), 161–173 (1985).

[3] V. Skakauskas, Kai kurie tikslūs uždavinio apie feromagnetiko elgesį begalybėje nusakytame lauke sprendiniai, *Liet. Matem. Rink.*, **29**(2), 377–385 (1989).

[4] V. Skakauskas, Aplinkos iš viendomenių dalelių įmagnetinimo tipo uždavinio vienintelis išsprendžiamumas, *Diferencialinės Lygtys ir Jų Taikymas*, **42**, 74–86 (1988).

[5] P. Katauskis, Antrasis kraštinis įmagnetinimo uždavinys su Landay–Lifšico lygtimi, *Liet. Matem. Rink.*, **34**(1), 85–93 (1994).

The existence of solution of nonlinear problem of magnetization

P. Katauskis

The kinetic equations describing the magnetization of a medium consisting of single-domain particles are investigated. The local existence of solution and its uniqueness is proved.