LMD mokslo darbai, III tomas, 174–177

Beveik sandaugos struktūros metrinėje hiperplokštuminių elementų erdvėje

Irena KATINIENĖ (VPU)

Tegu $M_n(x^i, u_j)$ – metrinė hiperplokštuminių elementų erdvė. Jos metrinis tenzorius $g_{ij}(x, u)$ ir atvirkštinis tenzorius $g^{ij}(x, u)$ tenkina diferencialinių lygčių sistemas

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k &= g_{ijk}\omega^k + g_{ij}^k\theta_k, \\ \mathrm{d}g^{ij} + g^{kj}\omega_k^i + g^{ik}\omega_k^j &= g_k^{ij}\omega^k + g^{ijk}\theta_k, \end{aligned}$$

kur

$$\theta_i = \mathrm{d}u_i - u_k\omega_i^k \quad (i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n).$$

Čia bendru atveju

$$g_{ijk} \neq g_{ikj}, \qquad g^{ijk} \neq g^{ikj}.$$

Šioje erdvėje nagrinėta Kartano tipo metrinė sietis $(\widetilde{\Gamma}_{jk}^i(x, u), \Gamma_{ij}(x, u), C_j^{ik}(x, u))$ ir gauta [2]

$$2C_j^{ik} = g_{jp}\big(g^{ikp} - g^{kpi} - g^{pik}\big). \tag{1}$$

Reikalaujame, kad metrika ir ši sietis būtų invariantinės atžvilgiu transformacijų

$$u_i = \rho u_i \quad (\rho > 0).$$

Tada

$$g_{ij}^k u_k = 0, \qquad g^{ijk}u_k = 0, \qquad C_k^{ij}u^k = -g^{kij}u_k,$$

kur

$$u^k = g^{ki}u_i.$$

Tegu erdvėje M_n duotas neišsigimęs tipo $(1, 1)$ tenzorinis laukas F, tenkinantis sąlygas

$$\begin{aligned} F_j^i F_k^j &= \lambda\delta_k^i \quad (\lambda = \pm 1), \\ \mathrm{d}F_j^i - F_k^j\omega_j^k + F_j^k\omega_k^i &= F_{jk}^j\omega^k + F_j^{ik}\theta_k, \end{aligned} \tag{2}$$

kur bendru atveju

$$F^i_{jk} \neq F^i_{kj}.$$

Kai $\lambda = -1$ sakysime, kad laukas F erdvėje M_n apibrėžia beveik kompleksinę struktūrą, o kai $\lambda = 1$ – beveik sandaugos struktūrą.

Tegu erdvėje M_n duoti dar du laukai L^i_α ir T^i_a:

$$\begin{aligned} dL^i_\alpha - L^i_\beta v^\beta_\alpha + L^j_\alpha \omega^i_j &= L^i_{\alpha j}\omega^j + L^{ij}_\alpha \theta_j, \\ dT^i_a - T^i_b v^b_a + T^j_a \omega^i_j &= T^i_{aj}\omega^j + T^{ij}_a \theta_j, \end{aligned}$$

kur v^β_α ir v^b_a – tiesinės ir tiesiškai nepriklausomos diferencialinės formos, tenkinančios diferencialinių lygčių sistemas

$$\begin{aligned} Dv^\alpha_\beta &= v^\alpha_\gamma \Lambda v^\gamma_\beta + \omega^i \Lambda v^\alpha_{\beta i}, \\ Dv^a_b &= v^a_c \Lambda v^c_b + \omega^i \Lambda v^a_{bi} \\ &(\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, m;\ a, b, \ldots = m+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Nagrinėsime tą atvejį, kai

$$\operatorname{rang} \|L^i_\alpha\| = m, \qquad \operatorname{rang} \|T^i_a\| = n - m, \qquad \det \|L^i_\alpha, T^i_a\| \neq 0. \tag{3}$$

Tada dydžiams L^i_α, T^i_a egzistuoja atvirkštiniai $\widetilde{L}^i_\alpha, \widetilde{T}^i_a$, tenkinantys sąlygas

$$L^i_\alpha \widetilde{L}^\beta_i = \delta^\beta_\alpha, \qquad T^i_a \widetilde{T}^b_i = \delta^b_a, \tag{4}$$

$$L^i_\alpha \widetilde{L}^\alpha_j + T^i_a \widetilde{T}^a_j = \delta^i_j. \tag{5}$$

Surišus (5) lygybes su $T^j_b \widetilde{L}^\beta_i$ ir $\widetilde{T}^b_i L^j_\beta$, gausime

$$\widetilde{L}^\beta_i T^j_a = 0, \qquad L^i_\beta \widetilde{T}^b_i = 0. \tag{6}$$

Sudarykime tiesiškai nepriklausomų vektorių sistemą

$$\vec{L}_\alpha = L^i_\alpha \vec{e}_i, \qquad \vec{T}_a = T^i_a \vec{e}_i,$$

ir išdėstykime vektorius $F\vec{L}_\alpha, F\vec{T}_a$ bazėje $\vec{L}_\alpha, \vec{T}_a$, t.y.

$$\begin{aligned} F\vec{L}_\alpha &= f^\beta_\alpha \vec{L}_\beta + u^a_\alpha \vec{T}_a, \\ F\vec{T}_a &= -v^\alpha_a \vec{L}_\alpha + t^b_a \vec{T}_b. \end{aligned} \tag{7}$$

Pasinaudojus (2) lygtimis, iš (7) lygčių gausime

$$
\begin{aligned}
&f^\alpha_\beta f^\beta_\gamma = \lambda\delta^\alpha_\gamma + v^\alpha_a u^a_\gamma,\\
&f^\beta_\alpha u^a_\beta = -u^b_\alpha t^a_b,\\
&t^c_a t^b_c = \lambda\delta^b_a + v^\alpha_a u^b_\alpha,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ir sakysime, kad dydžiai f, v, u, t apibrėžia metrinėje hiperplokštuminių elementų erdvėje (f, v, u, t) struktūrą. Iš (7) lygčių taip pat išplaukia

$$
\begin{aligned}
&f^\beta_\alpha = F^j_i L^i_\alpha \widetilde{L}^\beta_j, \qquad && u^a_\alpha = F^j_i L^i_\alpha \widetilde{T}^a_j,\\
&-v^\alpha_a = F^j_i \widetilde{L}^\alpha_j T^i_a, && t^b_a = F^j_i T^i_a \widetilde{T}^b_j.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Taigi, įrodyta teorema:

Teorema 1. *Metrinėje hiperplokštuminių elementų erdvėje duoti objektai F, L, T, tenkinantys sąlygas* (2), (3), *indukuoja (f, v, u, t) struktūrą, apibrėžtą objektais* (9).

Iš (7) lygčių, pasinaudojus (8) lygtimis, gausime

$$
F^i_j = f^\beta_\alpha L^i_\beta \widetilde{L}^\alpha_j + u^a_\alpha T^i_a \widetilde{L}^\alpha_j - v^\alpha_a L^i_\alpha \widetilde{T}^a_j + t^b_a T^i_b \widetilde{T}^a_j \tag{10}
$$

ir be to

$$
F^i_j F^j_k = \lambda\delta^i_k.
$$

Tokiu būdu įrodėme teoremą:

Teorema 2. *Erdvėje M_n duotoji (f, v, u, t) struktūra, tenkinanti* (8) *sąlygas, indukuoja tenzorinę struktūrą* (2), *kurios struktūrinis objektas F^i_j apibrėžiamas* (10) *lygtimis.*

Metrinėje hiperplokštuminių elementų erdvėje surastos tokios beveik sandaugos struktūros F ir jų indukuotosios (f, v, u, t) struktūros:

1. $F^i_j = \delta^i_j - 2L^i_\alpha \widetilde{L}^\alpha_j = -\delta^i_j + 2T^i_a \widetilde{T}^a_j$, $f^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta$, $u^a_\alpha = 0$, $v^\alpha_a = 0$, $t^b_a = \delta^b_a$.
2. $F^i_j = \delta^i_j - ku^\beta L^i_\beta U_j$, $2 = ku^\alpha u_\alpha$, $f^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - ku_\beta u^\alpha$, $u^a_\alpha = 0$, $v^\alpha_a = ku_a u^\alpha$, $t^b_a = \delta^b_a$.
3. $F^i_j = \delta^i_j - ku^i u_j$, $2 = ku^i u_i$, $f^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - ku_\beta u^\alpha$, $u^a_\alpha = -ku_\alpha u^a$, $v^\alpha_a = ku_a u^\alpha$, $t^b_a = \delta^b_a - ku_a u^b$.
4. $F^i_j = \delta^i_j - ku_a T^a_j u^i$, $2 = ku_a u^a$, $f^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$, $u^a_\alpha = 0$, $v^\alpha_a = ku_a u^\alpha$,

$t_a^b = \delta_a^b - ku_a u^b.$

5. $F_j^i = \delta_j^i - ku_\alpha \widetilde{L}_j^\alpha u^\beta L_\beta^i$, $2 = ku_\alpha u_\alpha$, $f_\beta^\alpha = \delta_\alpha^\beta - ku_\alpha u^\beta$, $u_\alpha^a = 0$,
$v_a^\alpha = 0$, $t_a^b = \delta_a^b$.
6. $F_j^i = \delta_j^i - ku_\alpha \widetilde{L}_j^\alpha u^\beta L_\beta^i$, $2 = ku^\alpha u_\alpha$, $f_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$, $u_\alpha^a = 0$, $v_a^\alpha = 0$,
$t_a^b = \delta_a^b - ku_a u^b$.
7. $F_j^i = \delta_j^i - ku^i \widetilde{L}_j^\alpha u_\alpha$, $2 = ku_\alpha u^\alpha$, $f_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - ku_\beta u^\alpha$, $u_\alpha^a = -ku_\alpha u^a$,
$v_a^\alpha = 0$, $t_a^b = \delta_a^b$.
8. $7F_j^i = \delta_j^i - ku_i T_a^j u^a$, $2 = ku_a u^a$, $f_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$, $u_\alpha^a = -u_\alpha u^a$, $v_a^\alpha = 0$,
$t_a^b = \delta_a^b - ku_a u^b$.
9. $F_j^i = \delta_j^i - kt^i u_j$, $2 = kt^i u_i$, $f_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - kt^\alpha u_\beta$, $u_\alpha^a = -kt^a u_\alpha$,
$v_a^\alpha = kt^\alpha u_a$, $t_a^b = \delta_a^b - kt^b u_a$.
10. $F_j^i = \delta_j^i - kc_j u^i$, $2 = kg_{ij}^j u^i$, $f_\beta^\alpha = \delta_\alpha^\beta - kc_\beta u^\alpha$, $u_\alpha^a = -kc_\alpha u^a$,
$v_a^\alpha = kc_a u^\alpha$, $t_a^b = \delta_a^b - kc_a u^b$, kur $t^i = g^{ipq} g_{pq}$, $t^\alpha = t^i \widetilde{L}_i^\alpha$, $t^a = t^i \widetilde{T}_i^a$,
$c_k = c_k^{ij} g_{ij}$, $c_\alpha = c_i L_\alpha^i$, $c_a = c_i T_a^i$, $u_\alpha = L_\alpha^i u_i$, $u_a = T_a^i u_i$, $u^\alpha = \widetilde{L}_i^\alpha u^i$,
$u^a = \widetilde{T}_i^a u^i$.

Literatūra

[1] И.Х. Медведевайте, Некоторые вопросы геометрии метрического пространства гиперплоских элементов, *Liet. Matem. Rink.*, **6**(4), 533–539 (1966).

[2] А. Башкене, О структурах, индуцируемых на подмногообразиях почти комплексного многообразия, *Liet. Matem. Rink.*, **16**(1), 24–34 (1976).

Les structures presque produit dans l'espace métrique des éléments hyperplaniques

I. Katinienė

Dans cet article on étudie l'espace métrique d'éléments d'appuis dont élément d'appuis est un hyperplan. Du tenseur métrique et ces prolongements partiels on a reçu dix diférents structures presque produit de cet espace.