*LMD mokslo darbai*, III tomas, 183–186


# Apie Kavagučio erdvių vidines tenzorines struktūras

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
*el. paštas: edmundas@vpu.lt*

Natūralus Finslerio erdvių apibendrinimas yra Kavagučio erdvė $K_n$, kurioje metrinė funkcija priklauso nuo taško koordinačių aukštesnių eilių išvestinių. Šių erdvių geometrijos pradmenis ketvirtajame šio amžiaus dešimtmetyje sukūrė japonų matematikai A. Kawaguchi, S. Kawaguchi, S. Synge ir kiti. Vėlesni tyrinėtojai, taikydami daugiausia ekstenzorinio skaičiavimo metodus, nagrinėjo Kavagučio erdves su specialių pavidalų metrinėmis funkcijomis, o daug apibendrintų šių erdvių geometrijos klausimų liko nepaliesta. Traktuojant apibendrintas antrosios eilės Kavagučio erdves kaip antrosios eilės liestines sluoksniuotes, normalizuota metrinių funkcijų pagalba, autoriui pavyko panaudoti E. Kartano išorinių formų metodą ir sukonstruoti Kavagučio erdvių tiesinių ir afininių siečių teorijos pagrindus, (žr. [2]).

Šiame darbe tęsiami antros eilės Kavagučio erdvių geometrijos tyrinėjimai. Įrodyta, kad šių erdvių tiesinės sieties objektas indukuoja beveik dvigubų ir beveik dualių tenzorinių struktūrų šeimas, surasti šių struktūrų pilnojo integruojamumo kriterijai, gautos sąlygos, kurias turi tenkinti afininės sieties objektai, susiję su šiomis struktūromis.

## 1. Apibendrintos Kavagučio erdvės

Glodi $n$-matė daugdara $K_n$ yra vadinama apibendrinta antrosios eilės Kavagučio erdve, jei jos antros eilės liestinė sluoksniuotė $T^2K_n$ yra normalizuota metrinės funkcijos $F$ pagalba. Jei $(x^i, y^i, z^i)$, $i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n$, – erdvės $T^2K_n$ lokaliosios koordinatės, tai jos yra lygčių sistemos $\omega^i. = 0$, $\theta^i. = 0$, $v^i. = 0$ sprendiniai, be to,

$$\begin{aligned} D\omega^i &= \omega^k \wedge \omega^i_k, \qquad D\theta^i = \omega^k \wedge \theta^i_k + \theta^k \wedge \omega^i_k, \\ Dv^i &= v^k \wedge \omega^i_k + \theta^k \wedge \theta^i_k + \omega^k \wedge v^i_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Metrinės funkcijos $F$ diferencialas užsirašo taip

$$\mathrm{d}F = \partial_k F\omega^k + \partial'_k F\theta^k + \partial''_k F v^k; \tag{2}$$

čia $\partial_i$, $\partial'_i$ ir $\partial''_i$ yra Pfaffo išvestinės. Papildomai reikalaujama, kad funkcijos hesianas $\|\partial''_i\partial''_j F\|$ nebūtų lygus nuliui. Ši sąlyga garantuoja, kad metrinis tenzorius $g_{ij} = \partial''_i\partial''_j F^4$ neišsigimęs, todėl egzistuoja jam atvirkštinis tenzorius $g^{ij}$ toks, kad $g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i$. Pažymėkime

$$H^i_j = g^{ip} y^q \partial''_j g_{pq}. \tag{3}$$

Jei det $\| H^i_j \| \neq 0$, tai egzistuoja tenzorius $\widetilde{H}^k_j$, kad $H^i_k H^k_j = \delta^i_j$. Tada diferencialinis-geometrinis objektas $(\Gamma^i_j, M^i_j)$

$$\Gamma^i_j = \widetilde{H}^i_p g^{kp} y^h \partial'_j g_{kh}, \qquad M^i_j = \frac{1}{2} y^k \partial_k \Gamma^i_j + z^k \partial'_k \Gamma^i_j + \frac{1}{2} \Gamma^i_k \Gamma^k_j \tag{4}$$

apibrėžia Kavagučio erdvės tiesinę sietį. Jei

$$\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} = \partial'_k \Gamma^i_j - \Gamma^h_k \partial''_h \Gamma^i_j, \qquad \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = \partial''_j M^i_k - \Gamma^h_k \partial''_j \Gamma^i_h, \tag{5}$$

tai objektai

$$(\Gamma^i_j, M^i_j, \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}, 0), \qquad (\Gamma^i_j, M^i_j, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}, 0)$$

apibrėžia erdvės $K_n$ afininių siečių objektus, kurios yra Bervaldo afininių siečių analogai [4]. Jei $\partial^\Gamma_i = \partial_i - \Gamma^k_i \partial'_k - (M^k_i - \Gamma^k_h \Gamma^h_i)\partial''_k$, $\partial'^\Gamma_i = \partial'_i - \Gamma^k_i \partial_k$ – invariantinės bazinės išvestinės, o

$$\begin{aligned} \Pi^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ip} (\partial^\Gamma_j g_{pk} + \partial^\Gamma_k g_{jp} - \partial^\Gamma_p g_{jk}), \\ C^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ip} (\partial'^\Gamma_j g_{pk} + \partial'^\Gamma_k g_{jp} - \partial'^\Gamma_p g_{jk}), \\ D^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{ip} \partial''_p g_{jk}, \end{aligned} \tag{6}$$

tai objektas $(\Gamma^i_j, M^i_j, \Pi^i_{jk}, C^i_{jk}, D^i_{jk})$ apibrėžia afininę sietį (Kartano afininies sieties analogą), kuri charakterizuojama tuo, kad metrinio tenzoriaus kovariantinės išvestinės šios afininės sieties atžvilgiu lygios nuliui.

Pažymėję $x^{n+i} = y^i$, $x^{2n+i} = z^i$, $\omega^{n+i} = \theta^i$, $\omega^{2n+i} = v^i$, (1) lygybes užrašysime taip

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B, \quad A, B, \ldots = 1, 2, \ldots, n, \ldots, 2n, \ldots, 3n. \tag{7}$$

Todėl galime nagrinėti Kavagučio erdvės $K_n$ apibendrintąją Sasaki metriką [1] $G_{AB}$

$$G_{AB} = \begin{Vmatrix} g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & g_{ij} \end{Vmatrix}, \qquad G^{AB} = \begin{Vmatrix} g^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & g^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & g^{ij} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

ir afinines sietis $\Lambda^C_{AB}$, apibrėžiamas lygybėmis

$$\nabla_{\partial_A}(\partial_B) = \Lambda^C_{AB} \partial_C. \tag{9}$$

Iš čia gaumame, kad

$$\mathrm{d}\Lambda^C_{AB} - \Lambda^C_{DB}\omega^D_A - \Lambda^C_{AD}\omega^D_B + \Lambda^D_{AB}\omega^C_D - \omega^C_{AB} = \partial_D \Lambda^C_{AB} \omega^D. \tag{10}$$

Jei $\partial^{\Gamma}_{A} = \{\partial^{\Gamma}_{i}, \partial'^{\Gamma}_{i}, \partial''_{i}\}$, tai galima apibrėžti kitą afininės sieties objektą $G^{C}_{AB}$ tokių kovariantinių išvestinių pagalba:

$$\nabla_{\partial^{\Gamma}_{A}}(\partial^{\Gamma}_{B}) = G^{C}_{AB}\partial^{\Gamma}_{C}. \tag{11}$$

Šis objektas pasižymi ta savybe, kad jo trys poobjekčiai yra afininės sieties objektai

$$\begin{aligned}
&\left(G^{i}_{jk}, G^{n+i}_{n+j\,n+k}, G^{2n+i}_{2n+j\,2n+k}\right) = \left(\Pi^{i}_{jk}, C^{i}_{jk}, D^{i}_{jk}\right),\\
&G^{n+i}_{j\,n+k} = \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{kj} + \frac{1}{2}g^{ip}\overset{1}{\nabla}_{j}g_{kp},\\
&G^{2n+i}_{j\,2n+k} = \overset{2}{\Gamma}{}^{i}_{kj} + \frac{1}{2}g^{ip}\overset{2}{\nabla}_{j}g_{kp}
\end{aligned} \tag{12}$$

(čia $\overset{1}{\nabla}_{j}$ ir $\overset{2}{\nabla}_{j}$ yra kovariantinės išvestinės afininių siečių (5) atžvilgiu). Likę sieties objektai yra tenzoriai, išsireiškiantys per metrinio tenzoriaus $g_{ij}$ komponentes.

## 2. Vidinės tenzorinės struktūros

Panagrinėkime tenzorių $t^{A}_{B}$, apibrėžtą Kavagučio erdvėje tokiu būdu

$$t = \begin{Vmatrix} a\delta^{i}_{j} & b\delta^{i}_{j} & c\delta^{i}_{j} \\ l\delta^{i}_{j} & m\delta^{i}_{j} & n\delta^{i}_{j} \\ p\delta^{i}_{j} & q\delta^{i}_{j} & r\delta^{i}_{j} \end{Vmatrix}, \quad a, b, c, l, m, n, p, q, r \in R. \tag{13}$$

Šio tenzoriaus $(\Gamma, M)$ – liftas [3] yra tenzorius $T^{A}_{B}$

$$T = \begin{Vmatrix} T^{i}_{j} & T^{n+i}_{j} & T^{2n+i}_{j} \\ T^{i}_{n+j} & T^{n+i}_{n+j} & T^{2n+i}_{n+j} \\ T^{i}_{2n+j} & T^{n+i}_{2n+j} & T^{2n+i}_{2n+j} \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Jis apibrėžia Kavagučio erdvės vidinę tenzorinę struktūrą J tada ir tik tada, kai

$$T^{A}_{B}T^{B}_{C} = \lambda\delta^{A}_{C}. \tag{15}$$

Jei $\lambda = 1$, struktūra $J$ vadinama beveik dualia, jei $\lambda = 0$ – beveik dviguba, o jei $\lambda = -1$ – beveik kompleksine [1].

**1 teorema**. *Tenzoriaus $t^{A}_{B}$ liftas $T^{A}_{B}$ apibrėžia Kavagučio erdvėje $K_n$ šeimas beveik dvigubų ir beveik dualių tenzorinių struktūrų.*

Teoremos įrodymas yra pateiktas autoriaus darbe [3].

Panagrinėkime vieną iš gautųjų vidinių tenzorinių struktūrų – beveik dvigubą struktūrą $J$, kurią nustato tenzorius

$$T = \left\| \begin{matrix} \delta^i_j & -2\Gamma^i_j & 2\Gamma^i_k\Gamma^k_j \\ 0 & -\delta^i_j & 2\Gamma^i_j \\ 0 & 0 & \delta^i_j \end{matrix} \right\| \tag{16}$$

**2 teorema**. *Kavagučio erdvės beveik dviguba struktūra $J$ yra pilnai integruojama tada ir tik tada, kai tiesinė sietis $(\Gamma^i_j, M^i_j)$ yra plokščia, o afininių siečių objektai $\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}$ ir $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}$ sutampa.*

Įrodymas remiasi tuo, kad tenzorinė struktūra pilnai integruojama tada ir tik tada, kai lygus nuliui jos Nijenhuiso tenzorius.

Afininė sietis $\Lambda^C_{AB}$ yra vadinama susijusia su struktūra $J$, jei struktūros tenzoriaus $T^A_B$ kovariantinė išvestinė šios sieties atžvilgiu lygi nuliui, t.y. kai galioja lygybė

$$\mathrm{d}T^A_B - T^A_C\left(\omega^C_B + \Lambda^C_{BD}\omega^D\right) + T^C_B\left(\omega^A_C + \Lambda^A_{CD}\omega^D\right) = 0. \tag{17}$$

Remiantis (7) ir (16) lygybėmis, iš šios sąlygos gauname, kad afininės sieties, susijusios su beveik dualia struktūra (16) objekto komponentės turi tenkinti šias sąlygas:

$$\begin{aligned}
&\Lambda^i_{n+k\,A} = \Gamma^p_k\Lambda^i_{2n+p\,A}, \qquad \Gamma^i_k\Lambda^k_{n+j\,A} = -\Gamma^k_j\Lambda^{n+i}_{n+k\,A},\\
&\partial_A\Gamma^i_j - \Gamma^i_p\Gamma^p_k\Lambda^k_{n+j\,A} - \Gamma^i_k\Gamma^{n+k}_{n+j\,A} - \Lambda^{2n+i}_{n+j\,A} + \Gamma^k_j\Lambda^{2n+i}_{2n+k\,A} = 0,\\
&-\partial_A\Gamma^i_j + \Lambda^{n+i}_{j\,A} + \Gamma^i_k\Lambda^k_{j\,A} - \Gamma^k_j\Lambda^{n+i}_{n+k\,A} - \Gamma^k_p\Gamma^p_j\Lambda^{n+i}_{n+k\,A} = 0.
\end{aligned}$$

Spręsdami šią sistemą kartu su (10) lygtimi, galime gauti konkrečių afininių siečių, susijusių su beveik dualia struktūra $J$, komponenčių išraiškas.

## References

[1] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World, Sci, Publ, Co, Singapore (1984).

[2] Э.Б. Мазетис, Некоторые вопросы геометрии кокасательного расслоения и касательного расслоения второго порядка, Кандидатская диссертация, Вильнюс (1993).

[3] Э.Б. Мазетис, О внутренних тензорных стуктурах касательного расслоения второго порядка, *Liet. Matem. Rink.*, **36**(4), 512–523 (1996).

[4] X. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Москва (1984).

## Zur Theorie inneren Tensorstrukturen in Kawaguchischen Räumen

E. Mazėtis

In einem Kawaguchischen Raum der zweiter Ordnung ist Existenz inneren dualen Tensorstrukturen beweist, Bedingungen ihrer Integrierbarkeit festgestellt und affine Zusammenhänge, assoziierte mit diesen Strukturen, konstruiert.