LMD mokslo darbai, III tomas, 187–192
© Matematikos ir informatikos institutas, 1999

Связности в расслоениях полуголономных r-реперов

Казимиерас НАВИЦКИС (ВУ)

Пусть M – дифференцируемое многообразие класса C^∞, $\bar{P}^r(M)\xrightarrow{\pi_0^r} M$ – соответствующее главное расслоение полуголономных r – реперов, $\bar{L}_n^r$ – структурная группа расслоения $\bar{P}^r(M)$. Рассмотрим локальную систему координат (U^i) в окрестности $U\subset M$. Полуголономный репер $X\in\left(\pi_0^r\right)^{-1}(U)$ определяется своими координатами $(i,j,\alpha,\beta,\ldots=1,\ldots,n)$:

$$X=\left(u^i,u^i_{\alpha_1},u^i_{\alpha_1\alpha_2},\ldots,u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\right).$$

Любой элемент $A\in\bar{L}_n^r$ может быть записан в виде

$$A=\left(A^\alpha_{\beta_1},A^\alpha_{\beta_1\beta_2},\ldots,A^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right),$$

где $\det\|A^\alpha_\beta\|\neq 0$. Если

$$B=\left(B^\alpha_{\beta_1},B^\alpha_{\beta_1\beta_2},\ldots,B^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right),$$

то

$$AB=C=\left(C^\alpha_{\beta_1},C^\alpha_{\beta_1\beta_2},\ldots,C^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right),$$

где

$$C^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}=\sum_{b=1}^{a}A^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_b}B^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\beta_1\ldots\beta_a}\ (a=1,\ldots,r).$$

Для явного выражения величин $B^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$ введем следующие понятия и обозначения. Пусть $u=1,\ldots,b$ и $a_1,\ldots,a_b$ – такие положительные целые числа, что

$$a_1+\ldots+a_b=a.$$

Введем обозначение

$$S(u)=a_1+\ldots+a_u.$$

Тогда

$$S(1) = a_1,\ S(2) = a_1 + a_2, \ldots,\ S(b) = a_1 + \ldots + a_b.$$

Определим перестановку типа $(a_1, \ldots, a_u)$ как такую перестановку множества $\{1, \ldots, a\}$, которая возрастает на каждом из множеств

$$\{S(u-1)+1, \ldots, S(u)\},$$

имеющих a_u элементов. Множество всех перестановок типа $(a_1, \ldots, a_u)$ обозначим через $Sh(a_1, \ldots, a_u)$.

В этих обозначениях справедлива формула

$$B^{\alpha_1 \ldots \alpha_b}_{\beta_1 \ldots \beta_a} = \sum_{Sh(a_1, \ldots, a_b)} B^{\alpha_1}_{\beta_1 \ldots b_{a_1}} B^{\alpha_2}_{\beta_{a_1+1} \ldots \beta_{S(2)}} \ldots B^{\alpha_b}_{\beta_{S(b-1)+1} \ldots \beta_a},$$

где суммирование в правой части производится по всем элементам множества $Sh(a_1, \ldots, a_b)$, имеющего

$$\bar{s}(a, b) = \frac{1}{b} \sum_{t=0}^{b} (-1)^t C_b^t (b-t)^a$$

элементов (число $\bar{s}(a, b)$ называется числом Стирлинга второго рода).

Координаты обратного элемента

$$A^{-1} = \left(\overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\beta_1}, \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\beta_1 \beta_2}, \ldots, \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_r} \right)$$

к элементу A определяются из системы

$$A^{\alpha}_{\gamma} \overset{*}{A}{}^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta},$$

$$\sum_{b=1}^{a} A^{\alpha}_{\gamma_1 \ldots \gamma_b} \overset{*}{A}{}^{\gamma_1 \ldots \gamma_b}_{\beta_1 \ldots \beta_a} = 0 \ (a = 2, \ldots, r).$$

На группе Ли $\bar{L}^r_n$ определим инвариантные слева дифференциальные 1-формы

$$\theta = \left(\theta^{\alpha}_{\beta_1}, \theta^{\alpha}_{\beta_1 \beta_2}, \ldots, \theta^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_r} \right)$$

равенствами

$$\theta^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_a} = \sum_{b=1}^{a} \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\gamma_1 \ldots \gamma_b} \mathrm{d} A^{\gamma_1 \ldots \gamma_b}_{\beta_1 \ldots \beta_a}.$$

Чтобы записать 1-формы θ в другом виде, применим способ обозначения, предложенный Г.Ф.Лаптевым в [1]. Пусть множество индексов $\beta_{b+2}, \ldots, \beta_a$ размещено в две ячейки, одна из которых может остаться и пустой. Порядок ячеек учитывается, а индексы в каждой ячейке пусть упорядочены по возрастанию их индексов. Произвольное такое размещение обозначим $\{\Delta(a,b), \nabla(a,b)\}$. Число таких размещений равно

$$\bar{s}(a-b,1) + \bar{s}(a-b,2) = 1 + (2^{a-b-1} - 1) = 2^{a-b-1}.$$

Пусть

$$A^{\gamma}_{\beta_1 \ldots \beta_b \varepsilon\, \nabla(a,b)} \theta^{\varepsilon}_{\beta_{b+1} \Delta(a,b)}$$

обозначает сумму слагаемых, соответствующих всевозможным размещениям $\{\Delta(a,b), \nabla(a,b)\}$.

Пусть множество индексов $\beta_{b+2}, \ldots, \beta_a$ размещено в две одинаковые ячейки при условии, что ни одна из них не остается пустой. Порядок ячеек учитывается, а индексы в каждой ячейке пусть упорядочены по возрастанию их индексов. Произвольное такое размещение обозначим $\{\bar{\Delta}(a,b), \bar{\nabla}(a,b)\}$. Число таких размещений равно

$$\bar{s}(a-b,2) = 2^{a-b-1} - 1.$$

Пусть

$$A^{\gamma}_{\beta_1 \ldots \beta_b \varepsilon\, \bar{\nabla}(a,b)} \theta^{\varepsilon}_{\beta_{b+1} \bar{\Delta}(a,b)}$$

обозначает сумму всех слагаемых, соответствующих всевозможным размещениям $\{\bar{\Delta}(a,b), \bar{\nabla}(a,b)\}$.

Используя метод математической индукции, получаем, что 1-формы θ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_a} = {} & \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\gamma} \Big(\mathrm{d} A^{\gamma}_{\beta_1 \ldots \beta_a} - A^{\gamma}_{\varepsilon \bar{\nabla}(a,0)} \theta^{\varepsilon}_{\bar{\Delta}(a,0)} \\ & - \sum_{b=1}^{a-1} A^{\gamma}_{\beta_1 \ldots \beta_b \varepsilon\, \nabla(a,b)} \theta^{\varepsilon}_{\beta_{b+1} \Delta(a,b)} \Big). \end{aligned}$$

Здесь в правой части имеется

$$1 + \left(2^{a-1} - 1\right) + \sum_{b=1}^{a-1} 2^{a-b-1} = 2^a - 1$$

слагаемых.

Дифференцируя внешним образом 1-формы θ, получаем структурные уравнения полуголономной группы Ли $\bar{L}^r_n$:

$$D\theta^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a} = \theta^\gamma_{\Delta(a,0)} \wedge \theta^\alpha_{\gamma\nabla(a,0)} + \sum_{b=1}^{a-1} \theta^\gamma_{\beta_{b+1}\Delta(a,b)} \wedge \theta^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b\gamma\nabla(a,b)};$$

здесь в правой части имеется

$$2^{a-1} + \sum_{b=1}^{a-1} 2^{a-b-1} = 2^a - 1$$

слагаемых. Другим способом структурные уравнения группы $\bar{L}^r_n$ получены Ю.Г.Лумисте [2].

Отображение

$$ad(B^{-1}) : \bar{L}^r_n \ni A \longrightarrow ad(B^{-1})A = B^{-1}AB \in L^r_n$$

индуцирует отображение

$$Ad(B^{-1}) : \theta \longrightarrow Ad(B^{-1})\theta,$$

определяемое формулами

$$\begin{aligned}\big(Ad(b^{-1})\big)^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a} = \overset{*}{B}{}^\alpha_\gamma \Bigg[\sum_{b=1}^{a} B^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_b}_{\beta_1\ldots\beta_a} \theta^\gamma_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_b} - B^\gamma_{\varepsilon\bar{\nabla}(a,0)} \big(Ad(B_{-1})\theta\big)^\varepsilon_{\bar{\nabla}(a,0)} \\ - \sum_{b=1}^{a-1} B^\gamma_{\beta_1\ldots\beta_b\varepsilon\nabla(a,b)} \big(Ad(B^{-1})\theta\big)^\varepsilon_{\beta_{b+1}\Delta(a,b)} \Bigg];\end{aligned}$$

здесь в правой части имеется

$$a + (2^a - 1) + \sum_{b=1}^{a-1} 2^{a-b-1} = 2^a + a - 2$$

слагаемых.

На главном расслоении $\bar{P}^r(M)$ глобально определены 1-формы

$$\omega = \big(\omega^\alpha, \omega^\alpha_{\beta_1}, \omega^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, \omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\big).$$

В локальных координатах на $\bar{P}^r(U)$ они определяются рекуррентным образом из формул

$$du^i = u^i_\alpha \omega^\alpha,$$

$$\mathrm{d}u^i_{\beta_1\ldots\beta_a} = u^i_{\beta\nabla(a,0)}\omega^\beta_{\nabla(a,0)} + \sum_{b=1}^{a-1} u^i_{\beta_1\ldots\beta_b\,\beta\nabla(a,b)}\omega^\beta_{\beta_{b+1}\Delta(a,b)}$$
$$+u^i_{\beta_1\ldots\beta_a\,\beta}\omega^\beta \quad (a=1,\ldots,r);$$

здесь в правой части имеется

$$2^{a-1} + \sum_{b=1}^{a-1} 2^{a-b-1} + 1 = 2^a$$

слагаемых. Структурные уравнения 1-форм ω имеют следующий вид:

$$\mathrm{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + \frac{1}{2}T^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma,$$
$$\mathrm{D}\omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a} = \omega^\gamma_{\Delta(a,0)} \wedge \omega^\alpha_{\gamma\nabla(a,0)}$$
$$+\sum_{b+1}^{a-1}\omega^\gamma_{\beta_{b+1}\Delta(a,b)} \wedge \omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b\gamma\nabla(a,b)} + \omega^\gamma \wedge \omega^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a\gamma} + \frac{1}{2}T^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a\gamma\varepsilon}\omega^\gamma \wedge \omega^\varepsilon;$$

здесь в правой части имеется 2^a+1 слагаемых; кроме того, величины $T^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, T^\alpha_{\beta_1,\ldots\beta_a\gamma\varepsilon}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$2u^i_{\beta_1\ldots\beta_{a-1}[\beta_a\beta]} = T^\gamma_{\Delta(a-1,0)\beta_a\gamma}u^i_{\gamma\nabla(a-1,0)}$$
$$+\sum_{b=1}^{a-2} T^\gamma_{\beta_{b+1}\Delta(a-1,b)\beta_a\beta}u^i_{\beta_1\ldots\beta_b\nabla(a-1,b)} + T^\gamma_{\beta_a\beta}u^i_{\beta_1\ldots\beta_{a-1}\gamma};$$

здесь в правой части имеется 2^{a-1} слагаемых.

Действие группы Ли $\bar{L}^r_n$ на главном расслоении $\bar{P}^r(M)$ индуцирует гомоморфизм

$$\lambda : L(\bar{L}^r_n) \longrightarrow X(\bar{P}^r(M))$$

алгебры Ли $L(\bar{L}^r_n)$ группы Ли $\bar{L}^r_n$ в алгебру Ли $X(\bar{P}^r(M))$ векторных полей на $\bar{P}^r(M)$.

Связностью на главном расслоении $\bar{P}^r(M)$ назовем такую 1-форму ω, которая обладает следующими свойствами:

1) $R^*_a\omega = Ad(a^{-1})\omega, \forall a \in \bar{L}^r_n$;
2) $\omega(\lambda(A)) = A, \forall A \in L(\bar{L}^r_n)$.

Связность на главном расслоении $\bar{P}^r(M)$ определяется такими функциями (коэффициентами связности)

$$\Gamma^i_{j_1\ldots j_a} \quad (a=2,\ldots,r+1),$$

что

$$u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a\alpha_{a+1}} = \sum_{b=1}^{a} \Gamma^i_{j_1\ldots j_b j_{b+1}} u^{j_1\ldots j_b}_{\alpha_1\ldots\alpha_a} u^{j_{b+1}}_{\alpha_{a+1}}, \quad (a = 1, \ldots, r).$$

Литература

[1] Г.Ф. Лаптев, Структурные уравнения главного расслоенного многообразия, *Тр. Геометр. семинара, Ин-т научн. информ. АН СССР*, 2, 161–178 (1969).

[2] Ю.Г. Лумисте, Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-корeперов, *Тр. Геометр. семинара, Ин-т научн. информ. АН СССР*, 5, 239–257 (1974).

Connections in the semiholonomic frame bundle of order r

K. Navickis

In this article we define the canonical forms on the principal bundle of semiholonomic frames of order r, give structure equations for these forms and determine the connection of order r.