LMD mokslo darbai, III tomas, 208–213

Plėtiniai ir diferencialiniai invariantai erdvėje Y_n

Algimantas Pranas URBONAS (VPU)
el. paštas: urbonas@vpu.lt

1. Plėtiniai

Įvesime diferencialinio-geometrinio objekto plėtinio sąvoką.

Apibrėžimas. k-tuoju diferencialinio-geometrinio objekto $\Omega^J(x,y)$ plėtiniu taške (x^i_o, y^o_k) vadinsime k-ąją šio objekto dalinę išvestinę normalinėse koordinatėse, apskaičiuotą taške, kurį atitinka normalinė sistema:

$$\left(\Omega^J_{,i_1 i_2 \dots i_k}\right)_{(x^i_o, y^o_k)} = \left(\frac{\partial^k \overset{v}{\Omega}{}^J}{\partial \bar{x}^{i_1} \partial \bar{x}^{i_2} \dots \partial \bar{x}^{i_k}}\right)_o . \tag{1.1}$$

Ženklas „v“ rodo, kad objektas imamas normaliojoje koordinačių sistemoje, o „o“ – reiškia, kad ši reikšmė imama taške, kuriam atitinka normalinė sistema. Iš apibrėžimo seka, kad plėtinys yra simetrinis pagal indeksus $i_1, i_2, \dots, i_k$.

Nesunku įrodyti, kad tenzoriaus k-tasis plėtinys yra tenzorius. Pažymėsime taip pat, kad plėtinys dviejų tenzorių (vienodo valentingumo) arba kokio tai tenzoriaus T^i_{jk} ir afininio sąryšio objekto Λ^i_{jk} yra tenzoriai atitinkamo valentingumo. Objektų sandaugos plėtiniai tenkina įprastas diferencialinio skaičiavimo taisykles.

2. Normalieji tenzoriai

Apibrėžimas. Normaliaisiais tenzoriais vadinsime objekto Γ_{jk} ir jo dalinių išvestinių pagal atraminį objektą visų eilių plėtinius:

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma_{jk,i_1 i_2 \dots i_p}\right)_{(x^i_o, y^o_k)} &= \left(\frac{\partial^p \overset{v}{\Gamma}_{jk}}{\partial \bar{x}^{i_1} \partial \bar{x}^{i_2} \dots \partial \bar{x}^{i_p}}\right)_o , \\
\left(\Gamma^i_{jk,i_1 i_2 \dots i_p}\right)_{(x^i_o, y^o_k)} &= \left(\frac{\partial^p \overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}}{\partial \bar{x}^{i_1} \partial \bar{x}^{i_2} \dots \partial \bar{x}^{i_p}}\right)_o , \\
\left(\Gamma^{il}_{jk,i_1 i_2 \dots i_p}\right)_{(x^i_o, y^o_k)} &= \left(\frac{\partial^p \overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}}{\partial \bar{x}^{i_1} \partial \bar{x}^{i_2} \dots \partial \bar{x}^{i_p}}\right)_o , \qquad (2.1) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left(\Gamma^{il\dots r}_{jk,i_1 i_2 \dots i_p}\right)_{(x^i_o, y^o_k)} &= \left(\frac{\partial^p \overset{v}{\Gamma}{}^{il\dots r}_{jk}}{\partial \bar{x}^{i_1} \partial \bar{x}^{i_2} \dots \partial \bar{x}^{i_p}}\right)_o .
\end{aligned}$$

Čia ir ateityje $\Gamma^{il}_{jk} = -\frac{\partial^2 \Gamma_{jk}}{\partial y_i \partial y_l}, \ldots, \Gamma^{il\ldots r}_{jk} = -\frac{\partial^s \Gamma_{jk}}{\partial y_i \partial y_l \ldots \partial y_r}$. Paprastindami užrašus, (2.1) normaliuosius tenzorius žymėsime raide N su atitinkamais indeksais.

Pvz., $\left(\Gamma^i_{jk,i_1i_2}\right)_{(x^i_o, y^o_k)} = N^i_{jk,i_1i_2}$.

1 teorema. *Objektai Γ_{jk} ir Γ^i_{jk} normaliosios sistemos pradiniame taške yra lygūs nuliui, t.y.*

$$\left(\overset{v}{\Gamma}_{jk}\right)_o = 0, \tag{2.2}$$

$$\left(\overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}\right)_o = 0. \tag{2.3}$$

Įrodymas. Geodezinių kreivių lygtys normaliojoje koordinačių sistemoje yra:

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{dt^2} + \overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}\frac{d\bar{x}^j}{dt}\cdot\frac{d\bar{x}^k}{dt} = 0.$$

Šios diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai taške (x^i_o, y^o_k), kaip buvo pažymėta anksčiau, yra tiesinės funkcijos

$$\bar{x}^i = b^i t, \tag{2.4}$$

kur b^i – pastovūs skaičiai ir ne visi kartu lygūs nuliui. Tai reiškia, kad šioje sistemoje geodezinių kreivių taškuose yra patenkintos lygybės:

$$\overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk} b^j b^k = 0. \tag{2.5}$$

Iš čia, turėdami omenyje konstantų b^i parinkimo laisvę, išvedame

$$\left(\overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}\right)_o = 0. \tag{2.6}$$

(2.2) išplaukia iš $\Gamma^i_{jk} y_i = -\Gamma_{jk}$.

3. Normaliųjų tenzorių tapatybės

Imame objektus Γ_{jk} ir Γ^i_{jk} normaliojoje koordinačių sistemoje ir jų skleidinius eilutėmis ant geodezinių linijų:

$$\begin{aligned}\overset{v}{\Gamma}_{jk} = &\left\{\left(\partial_{i_1}\overset{V}{\Gamma}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1} - \left(\overset{V}{\Gamma}{}^i_{jk}\right)_o \Delta \overset{V}{y}_i\right\} \\ &+\frac{1}{2!}\left\{\left(\partial_{i_1i_2}\overset{v}{\Gamma}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2} - 2\left(\partial_{i_1}\overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\Delta\overset{v}{y}_i - \left(\overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}\right)_o \Delta\overset{v}{y}_i\Delta\overset{v}{y}_l\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{3!}\left\{\left(\partial_{i_1i_2i_3}\overset{v}{\Gamma}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\bar{x}^{i_3} - 3\left(\partial_{i_1i_2}\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\right)_o \Delta\overset{v}{y}_i \right.\\
&\left. -3\left(\partial_{i_1}\overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}\right)_o \Delta\overset{v}{y}_i\Delta\overset{v}{y}_l - \left(\overset{v}{\Gamma}{}^{ils}_{jk}\right)_o \Delta\overset{v}{y}_i\Delta\overset{v}{y}_l\Delta\overset{v}{y}_s\right\} + \dots
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = &\left\{\left(\partial_{i_1}\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1} + \left(\overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}\right)_o \Delta\overset{v}{y}_l\right\}\\
&+\frac{1}{2!}\left\{\left(\partial_{i_1i_2}\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2} + 2\left(\partial_{i_1}\overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\Delta\overset{v}{y}_l + \left(\overset{v}{\Gamma}{}^{ils}_{jk}\right)_o \Delta\overset{v}{y}_l\Delta\overset{v}{y}_s\right\}\\
&+\frac{1}{3!}\left\{\left(\partial_{i_1i_2i_3}\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\bar{x}^{i_3} + 3\left(\partial_{i_1i_2}\overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\Delta\overset{v}{y}_l\right.\\
&\left.+3\left(\partial_{i_1}\overset{v}{\Gamma}{}^{ils}_{jk}\right)_o \bar{x}^{i_1}\Delta\overset{v}{y}_l\Delta\overset{v}{y}_s + \left(\overset{v}{\Gamma}{}^{ilsp}_{jk}\right)_o \Delta\overset{v}{y}_l\Delta\overset{v}{y}_s\Delta\overset{v}{y}_p\right\} + \dots
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Čia elemento $\overset{v}{y}_i$ pokytis einant geodezine linija iš taško $\left(0,\overset{v}{y}{}^o_i\right)$ į tašką $\left(\bar{x}^i,\overset{v}{y}_i\right)$ yra $\Delta\overset{v}{y}_i = \overset{v}{y}_i - \overset{v}{y}{}^o_i$, kurį galima išreikšti eilute

$$
\Delta\overset{V}{y}_i = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\underset{ii_1i_2\dots i_k}{\overset{V}{\Gamma}}\right)_o \bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\dots\bar{x}^{i_k}.
\tag{3.3}
$$

Atsižvelgę į (3.3) ir į normaliųjų tenzorių apibrėžimą bei jų žymenis, formules (3.1) ir (3.2) užrašysime pavidalu:

$$
\begin{aligned}
\overset{v}{\Gamma}_{jk} = &\overset{o}{N}_{jki_1}\bar{x}^{i_1} + \frac{1}{2!}\overset{o}{N}_{jk(i_1i_2)}\bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\\
&+\frac{1}{3}\left\{\overset{o}{N}_{jk(i_1i_2i_3)} - 3\,\overset{o}{N}{}^{i}_{jk(i_1}\overset{o}{N}_{|i|i_2i_3}\right\}\bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\bar{x}^{i_3} + \dots
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = &\overset{o}{N}{}^{i}_{jki_1}\bar{x}^{i_1} + \frac{1}{2}\left(\overset{o}{N}{}^{i}_{jk(i_1i_2)} - \overset{o}{N}{}^{il}_{jk}\overset{o}{N}_{l(i_1i_2)}\right)\bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\\
&+\frac{1}{3!}\left\{\overset{o}{N}{}^{i}_{jk(i_1i_2i_3)} - \overset{o}{N}{}^{il}_{jk}\overset{o}{N}_{l(i_1i_2i_3)} - 3\,\overset{o}{N}{}^{il}_{jk(i_1}\overset{o}{N}_{|l|i_2i_3}\right\}\bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_2}\bar{x}^{i_3} + \dots.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Tuo būdu, tiesinės sieties $\overset{v}{\Gamma}_{jk}$ bei afininės sieties $\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk}$ koeficientai ant geodezinių linijų apibrėžiami duotomis normaliųjų tenzorių reikšmėmis (aišku, tokiomis, kad eilutės (8.4) ir (8.5) konverguotų), be to, turi būti patenkintos tapatybės:

$$
\begin{aligned}
&N^{i}_{(jki_1)} = 0,\\
&N^{i}_{(jki_1i_2)} - N^{il}_{(jk}N_{|l|i_1i_2)} = 0,\\
&N^{i}_{(jki_1i_2i_3)} - N^{il}_{(jk}N_{|l|i_1i_2i_3)} - 3N^{il}_{(jki_1}N_{|l|i_2i_3)} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Šias tapatybes gauname $\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk}$ išraišką (8.5) įstatę į lygybę

$$
\overset{v}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\bar{x}^{j}\bar{x}^{k} = 0,
\tag{3.7}
$$

kuri išplaukia iš $\frac{d^2\bar{x}^i}{dt^2} = \overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}\frac{d\bar{x}^j}{dt}\frac{d\bar{x}^k}{dt} = 0$ ir $\bar{x}^i = \tau^i_o t$.

Pažymėsime, kad kitos normaliųjų tenzorių savybės yra tokios:

$$
\begin{aligned}
&N_{jki_1i_2\dots i_p} = N_{(jk)i_1i_2\dots i_p},\\
&N_{jki_1i_2\dots i_p} = N_{jk(i_1i_2\dots i_p)},\\
&N^i_{jki_1i_2\dots i_p} = N^i_{(jk)i_1i_2\dots i_p},\\
&N^i_{jki_1i_2\dots i_p} = N^i_{jk(i_1i_2\dots i_p)},\\
&(p = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}
$$

Užrašykime kreivumo tenzorių R_{ijk} normaliosiose koordinatėse:

$$\overset{v}{R}_{ijk} = 2\left(\partial_{[j}\overset{v}{\Gamma}_{|i|k]} - \overset{v}{\Gamma}{}^p_{i[j}\overset{v}{\Gamma}_{|p|k]}\right).$$

Iš čia ir normaliųjų tenzorių savybių išplaukia

$$R_{ijk} = N_{ikj} - N_{ijk}, \tag{3.8}$$

$$R_{[ijk]} = 0 \tag{3.9}$$

4. Apie erdvės Y_n diferencialinius invariantus

Normaliųjų tenzorių pagrindu galima pagrįsti visą erdvės Y_n diferencialinių invariantų teoriją. Šią galimybę iliustruoja tokia teorema.

2 teorema. *Jei turime tenzorinį diferencialinį invariantą*

$$
\begin{aligned}
T^A = F^A\Big(&\Gamma_{jk},\ \partial_{i_1}\Gamma_{jk},\ \partial_{i_1i_2}\Gamma_{jk}, \dots, \partial_{i_1i_2\dots i_p}\Gamma_{jk};\\
&\Gamma^i_{jk},\ \partial_{i_1}\Gamma^i_{jk},\ \partial_{i_1i_2}\Gamma^i_{jk}, \dots, \partial_{i_1i_2\dots i_s}\Gamma^i_{jk};\\
&\Gamma^{il}_{jk},\ \partial_{i_1}\Gamma^{il}_{jk},\ \partial_{i_1i_2}\Gamma^{il}_{jk}, \dots, \partial_{i_1i_2\dots i_t}\Gamma^{il}_{jk}; \dots\Big),
\end{aligned}
$$

tai jis nepasikeis, jei jo argumentus pakeisime atitinkamais normaliaisiais tenzoriais, o Γ_{jk} ir Γ^i_{jk} – nuliais.

Įrodymas. Pereikime į normaliąją koordinačių sistemą, kurioje teisinga lygybė

$$(T^A)_{(x^i_o, y^o_i)} = \left(\overset{v}{T}{}^A\right)_o$$

dėl šio objekto tenzorinio pobūdžio ir pareinamybių

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)_o = \delta^i_k, \quad \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)_o = \delta^i_k.$$

Kitaip tariant,

$$(T^A)_{(x_o^i, y_i^o)} = \overset{\infty}{F}{}^A \Big(\overset{v}{\Gamma}_{jk}, \partial_{i_1} \overset{v}{\Gamma}_{jk}, \ldots \partial_{i_1 i_2 i_p} \overset{v}{\Gamma}_{jk}; \overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}, \partial_{i_1} \overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}, \ldots \partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} \overset{v}{\Gamma}{}^i_{jk}; \overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}, \partial_{i_1} \overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk}, \ldots, \partial_{i_1 i_2 \ldots i_t} \overset{v}{\Gamma}{}^{il}_{jk} \Big)\Big|_{(t=0)},$$

o tai reiškia, kad

$$(T^A)_{(x_o^i, y_i^o)} = F^A\Big(0, N_{jki_1}, N_{jki_1i_2}, \ldots, N_{jki_1i_2\cdots i_p}; 0, N^i_{jki_1}, N^i_{jki_1i_2}, \ldots, N^i_{jki_1i_2\cdots i_s}; N^{il}_{jk}, N^{il}_{jki_1}, N^{il}_{jki_1i_2}, \ldots, N^{il}_{jki_1i_2\cdots i_t}; \ldots \Big)\Big|_{(x_o^i, y_i^o)}.$$

Kadangi paskutinė lygybė teisinga bet kokiam elementui (x_o^i, y_k^o), tai ji teisinga visoje erdvėje Y_n.

Surasime dar ryšius tarp normaliųjų tenzorių ir kreivumo tenzoriaus bei jo kovariantinių išvestinių.

Iš (4.10) formulės [1], užrašytos normaliojoje koordinačių sistemoje atitinkančioje nagrinėjanąjį elementą, skaičiuodami R^i_{jkl} reikšmę pradiniame taške, gauname

$$(R^i_{jkl})_{(x_o^i, y_i^o)} = 2\left(\partial_{[k} \overset{v}{\Gamma}{}^i_{|j|l]}\right)_o,$$

t.y.

$$R^i_{jkl} = 2N^i_{j[lk]}. \tag{4.1}$$

Iš čia ir (8.6), gauname

$$N^i_{jkl} = -\frac{2}{3} R^i_{(jk)l}.$$

Iš čia išplaukia kreivumo tenzoriaus kovariantinių išvestinių reiškimas normaliaisiais tenzoriais:

$$\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\ldots\nabla_{i_p} R^i_{jkl} = 2\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\ldots\nabla_{i_p} N^i_{j(lk)}, \tag{4.2}$$

$$\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\ldots\nabla_{i_p} N^i_{jkl} = -\frac{2}{3}\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\ldots\nabla_{i_p} R^i_{(jk)l}. \tag{4.3}$$

Difrencijuodami R^i_{jkl} išraišką normaliosiose koordinatėse pagal $\overline{x^s}$, gausime

$$\nabla_s R^i_{jkl} = 2(N^i_{j[lk]s} + N^{ip}_{j[k} N_{|p|l]s}).$$

Diferencijuodami toliau pagal $\bar{x}^{i_1}, \bar{x}^{i_2}, \ldots, \bar{x}^{i_t}$ ir apskaičiuodami reikšmę pradiniame elemente, turėsime

$$R^i_{jkl, i_1, i_2, \ldots, i_t} = 2(N^i_{j[lk]\, i_1\, i_2 \ldots i_t\, s} + \ldots),$$

kur daugtaškiu pažymėtas daugianaris nuo normaliųjų tenzorių. Tuo būdu, kreivumo vektoriaus plėtiniai gali būti išreikšti normaliųjų tenzorių racionaliąja funkcija.

Literatūra

[1] J. Pakalnytė, A. Urbonas, *Plėtiniai ir diferencialiniai invariantai erdvėje Y_n* (1999).

Extentions et invariants différentiels dans l'espace Y_n

A.P. Urbonas

On étudie les extentions des objets différentiels – géométriques, les tenseurs normales et invariants différentiels dans l'espace Y_n.