LMD mokslo darbai, III tomas, 424–429

Integralo su greitai osciliuojančia funkcija skaitinio integravimo formulės

Raimondas ČIEGIS (MII, VU), Ramūnas ŠABLINSKAS (VDU)
el. paštas: rc@fm.vtu.lt, ramas@vdu.lt

1. Uždavinio formulavimas

Daugelis optikos, radioelektronikos ir akustikos taikymų yra susiję su difrakcijos vaizdo skaičiavimo uždaviniu įvairioms apertūrų formoms [3]. Keletas tokių taikymų yra: radio antenų formos, lokatorių formos, kompaktinio disko grotuvo galvutės modeliavimas. Matematinis difrakcinio lauko modelis stačiakampei apertūrai aprašomas integralu [1]:

$$U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} u(x, y) \frac{z_0}{s^2} e^{iks} \, dx \, dy, \tag{1}$$

$$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2},$$

čia k yra banginis skaičius, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ - bangos ilgis. Pradinis pasiskirstymas $u(x, y)$ yra apibrėžiamas tokiu būdu:

$$u(x, y) = T_f(x, y) T_\varphi(x, y) F(x, y), \tag{2}$$

čia $F(x, y)$ yra bangos forma:

$$F(x, y) = \exp\left\{-\left(\left(\frac{x}{w_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{w_y}\right)^2\right)\right\}, \tag{3}$$

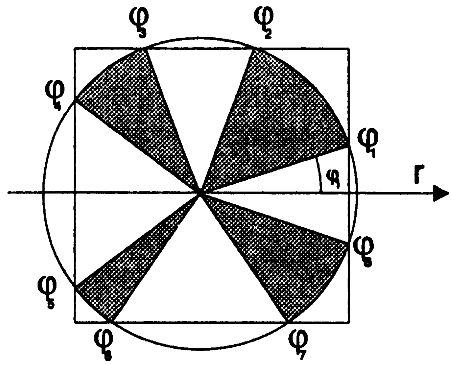
T_f yra fokusavimo narys :

$$T_f = \exp\left\{-\frac{ik}{2}\left(\frac{x^2}{f_x} + \frac{y^2}{f_y}\right)\right\},$$

T_φ yra operatorius, aprašantis aberacijas, pvz.:

$$T_\varphi(x, y) = \exp\left\{i\kappa\left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}.$$

Kadangi $k \approx 10000$, tai pointegralinė funkcija yra labai greitai osciliuojanti, todėl tokius integralus negalime efektyviai apskaičiuoti nei standartinėmis integravimo formulėmis (pvz. Simpsono), nei panaudodami adaptyvius integravimo algoritmus (pvz. Genzo-Maliko [6]). Jiems sudaromi specialūs skaitinio integravimo algoritmai [4, 5].



1 pav. Integravimo sritis naujose koordinatėse

2. Radialinių koordinačių panaudojimas

Nagrinėkime integralą (1), kai $T_f = 1$ ir $T_\varphi = 1$, t.y. skaičiuosime integralą (1):

$$I = -\frac{ik}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\exp\left\{-\left(\left(\frac{x}{w_x}\right)^2+\left(\frac{y}{w_y}\right)^2\right)\right\}\frac{z_0}{s^2}e^{iks}\,dx\,dy.$$

Tada įveskime naujas koordinates:

$$x - x_0 = r\cos\varphi,\quad y - y_0 = r\sin\varphi,\quad 0 \leqslant r \leqslant R. \tag{4}$$

Naujose koordinatėse gauname integralą:

$$I = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^R rF(r,x_0,y_0)e^{ik\sqrt{z_0^2+r^2}}\,dr, \tag{5}$$

$$F(r,x_0,y_0) = \frac{z}{z^2+r^2}\int_{\partial\varphi} e^{-\left[\left(\frac{r\cos\varphi+x_0}{w_x}\right)^2+\left(\frac{r\sin\varphi+y_0}{w_y}\right)^2\right]} \tag{6}$$

čia $\partial\varphi$ yra apskritimo su radiusu r lanko dalis, priklausanti sričiai $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$. Todėl bendru atveju integralas (6) gali būti išskaidytas daugiausia į keturis integralus (žr. Pav. 1):

$$\int_{\partial\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} + \int_{\varphi_5}^{\varphi_6} + \int_{\varphi_7}^{\varphi_8}. \tag{7}$$

Po šios transformacijos (6) integralo pointegralinė funkcija nėra greitai osciliuojanti, todėl tokį integralą galime nagrinėti kaip elementarią funkciją ir ją apskaičiuoti dideliu tikslumu Simpsono metodu. Toliau nagrinėsime (5) integralo skaitinį skaičiavimo algoritmą.

Imkime vienmatį modelinį integralą:

$$I = \int_a^b r f(r) e^{ik\sqrt{z^2+r^2}}\,\mathrm{d}r = \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} r f(r) e^{ik\sqrt{z^2+r^2}}\,\mathrm{d}r. \tag{8}$$

Tokio integralo artinį apskaičiuosime funkciją $f(r)$ intervale (a_j, b_j) pakeisdami konstanta $f((a_j + b_j)/2)$, tada gauname formulę:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) \int_{a_j}^{b_j} r e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \mathrm{d}r \\ &= \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) \left(\frac{1}{k^2} - i\frac{s}{k}\right) e^{iks}\Big|_{\sqrt{a^2+z^2}}^{\sqrt{b^2+z^2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

1 teorema. *Jeigu* $|f'| \leqslant M_1$ *intervale* $[a, b]$, *tai* S_N *konverguoja į* I *tolygiai* k *atžvilgiu ir yra teisingas toks gautojo artinio* S_N *tikslumo įvertis:*

$$|S_N - I| \leqslant \frac{(b-a)b}{N} M_1.$$

Įrodymas. Iš (8) ir (9) lygybių po nesudėtingų pertvarkymų gauname tokį įvertį:

$$\begin{aligned} |S_N - I| &\leqslant \sum_{j=1}^{N} \left| \int_{a_j}^{b_j} r \left(f(r) - f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right)\right) e^{ik\sqrt{z^2+r^2}}\,\mathrm{d}r \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} r \left| f(r) - f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) \right| \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Funkciją $f(r)$ skleidžiame Teiloro eilute:

$$f(r) = f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) + f'(c)\left(r - \frac{a_j + b_j}{2}\right), \quad a_j \leqslant c \leqslant b_j,$$

tada

$$|S_N - I| \leqslant M_1 \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} r \left| r - \frac{a_j + b_j}{2} \right| \mathrm{d}r \leqslant \frac{(b-a)bM_1}{N}.$$

Teorema įrodyta.

3. Didesniojo tikslumo Filono formulės

Nagrinėkime modelinį integralą:

$$I = \int_0^R r f(r^2) e^{ik\sqrt{z^2+r^2}}\,\mathrm{d}r. \tag{10}$$

Tokį integralą gauname, kai (1) formulėje $x_0 = 0, y_0 = 0$ ir (3) formulėje $w_x = w_y$. Įveskime pažymėjimą $y^2 = z^2 + r^2$. Pertvarkome integralą:

$$\begin{aligned} I &= \int_z^{\sqrt{z^2+R^2}} yF(y^2 - z^2)e^{iky}\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} yF(y^2 - z^2)e^{iky}\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{11}$$

3.1. *Gabalais pastovios aproksimacijos atvejis*

Kaip ir ankstesniame skyriuje, funkciją $F(y^2 - z^2)$ pakeiskime konstanta $F(a^2 - z^2)$, tada gauname skaitinio integravimo formulę:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{j=1}^{N} F(a_j^2 - z^2) \int_{a_j}^{b_j} ye^{iky}\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j=1}^{N} F(a_j^2 - z^2) \left[\left(\frac{1}{k^2} - \frac{ia_j}{k} \right) e^{ika_j} - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{ib_j}{k} \right) e^{ikb_j} \right]. \end{aligned}$$

Šios formulės tikslumas įvertintas Teoremoje 1.

3.2. *Gabalais tiesinės aproksimacijos atvejis*

Įveskime žymėjimą:

$$H(y) = F(y^2 - z^2).$$

Aproksimuokime funkciją $H(y)$ tiesiniu polinomu

$$H(y) \approx H(a) + \frac{H(b) - H(a)}{b - a}(y - a).$$

Tada iš (11) lygybės gauname tokią skaitinio integravimo formulę:

$$S_{1N} = \sum_{j=1}^{N} H(a_j) \int_{a_j}^{b_j} ye^{iky}\,\mathrm{d}y + \frac{H(b_j) - H(a_j)}{b_j - a_j} \int_{a_j}^{b_j} y(y - a_j)e^{iky}\,\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\frac{H(b_j) - H(a_j)}{b_j - a_j} \left(\frac{2i}{k} - a_j \right) \right) \left(\frac{1}{k^2} - \frac{iy}{k} \right) - \frac{H(b_j) - H(a_j)}{b_j - a_j} \frac{iy^2}{k} \right] \mathrm{e}^{iky} \Big|_{a_j}^{b_j}. \tag{12}$$

2 teorema. *Jeigu* $|H''| \leqslant M_2$ *intervale* $[a, b]$, *tai* S_{1N} *konverguoja į* I *tolygiai* k *atžvilgiu ir*

$$|S_{1N} - I| \leqslant \frac{b-a}{2N^2} M_2.$$

Įrodymas. Iš (11) ir (12) lygybių gauname įvertį:

$$|S_{1N} - I| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \left| \int_{a_j}^{b_j} y \left(H(y) - H(a_j) - \frac{H(b_j) - H(a_j)}{b_j - a_j} (y - a_j) \right) \mathrm{e}^{iky} \, \mathrm{d}y \right|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} y \left| H(y) - H(a_j) - \frac{H(b_j) - H(a_j)}{b - a_j} (y - a_j) \right| \mathrm{d}y.$$

Niutono interpoliacinio polinomo paklaidą galime įvertinti nelygybe [2]:

$$\left| H(y) - H(a_j) - \frac{H(b_j) - H(a_j)}{b_j - a_j} (y - a_j) \right| \leqslant \frac{M_2}{2} (y - a_j)(b_j - y),$$

tada

$$|S_{1N} - I| \leqslant M_2 \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} (y - a_j)(b_j - y) \, \mathrm{d}y \leqslant \frac{M_2(b-a)}{2N^2}.$$

Teorema įrodyta.

4. Skaitinio eksperimento rezultatai

Skaičiuosime integralą:

$$I = kz \int_0^R \frac{1}{s^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{w^2}} \mathrm{e}^{iks} \, \mathrm{d}r, \quad s = \sqrt{r^2 + z^2}. \tag{13}$$

Pasirinkime $z = 3$, $k = 9500$, integravimo intervalą $R = 6$. Iš Lentelėje 1 pateiktų rezultatų matome, kad skaičiuojant (13) Simpsono metodu, užduotas tikslumas pasiekiamas tik tada, kai padalinimų skaičius yra $O(k)$ eilės. Metodu (9) tą patį tikslumą pasiekiame su dvigubai mažiau

1 lentelė.
Intervalų padalinimų skaičius skirtingiems metodams

Tikslumas ε	Padalinimų skaičius		
	Simpsono metodas	Metodas (9)	Metodas (12)
0.01	16384	2048	4
0.001	32768	16384	4
0.0001	32768	16384	4
0.00001	32768	16384	128
0.000001	65536	32768	256

padalinimų, tačiau konvergavimo asimptotika yra tokios pat eilės kaip ir Simpsono metodo. Metodas (12) konverguoja žymiai greičiau nei kiti.

Skaičiuojant dvimatį integralą (1) Simpsono metodu, skaičiavimo laikai yra labai dideli dėl didelio padalinimų skaičiaus pagal abi koordinates. Integralo reikšmės viename taške skaičavimo laikas yra apie 570 sekundžių, kai naudojame Pentium 300MHz darbo stotį. Įvedus koordinačų pakeitimą, dvimatis integralas skaičiuojamas per 0.1–4.0 sekundes, šis laikas priklauso nuo pasirenkamo stebėjimo taško.

Realiuose uždaviniuose skaičiuojant lazerio spindulio projekciją paprastai nagrinėjamas ne mažesnis nei 100×100 taškų laukas, todėl vieno taško paskaičiavimo laikas yra kritinis parametras sprendžiant visą uždavinį. Norint apskaičiuoti 100×100 vaizdą net ir naudojantis koordinačų pakeitimo metodu, reikėtų sugaišti apie 20000 sekundžių (5.5 valandos), todėl tokiam uždaviniui spręsti reikėtų naudoti lygiagrečiuosius kompiuterius.

Literatūra

[1] A. Dubra and J.A.Ferrari, Diffracted field by an arbitrary aperture, *American Journal of Physics*, **67**(1), 87–92 (1999).
[2] R. Čiegis, V. Būda, *Skaičiuojamoji matematika*, TEV, Vilnius (1997).
[3] J.J. Stamnes, *Waves in Focal Regions*, J.W. Arrowsmith Ltd., Bristol (1986).
[4] L.A. D'Arcio, J.J.M.Braat and H.J.Frankena, Numerical evaluation of diffraction integrals for apertures of complicated shape, *Optical Society of America*, **11**(10), 2664–2674 (1994).
[5] J.J. Stamnes, Hybrid integration technique for efficient and accurate computation of diffraction integrals, *Optical Society of America*, **6**(9), 1330–1342 (1989).
[6] A.C. Genz and A.A. Malik, Remarks on Algorithm 006: an adaptive algorithm for numerical integration over an *N*-dimentional rectangular region, *J. Comput. Appl. Math.*, **6**, 295–302 (1980).

Numerical algorithm for integrals with rapid oscilatory functions

R. Čiegis, R. Šablinskas

In this paper we consider numerical integration of rapid oscilatory functions for the laser beam difraction field calculation problem. Two different methods are proposed and the accuracy of approximations are investigated. Numerical experiments are presented and analysed.